Série A, N° 908
N° d'ordre : 932

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(mention Sciences)

par

James N. JAVAHER
LL.B. - B.A. - B.S. - M.A.

1re THÈSE : Contribution à l'étude de la théorie des mesures et des erreurs.

2e THÈSE : Ensembles orthogonaux de carrés latins et le corps de galois.

Soutenues le 24 juin 1960 devant la Commission d'Examen

M. J.-L. DESTOUCHES Président

M. D. DUGUÉ
M. R. DAUDEL } Examinateurs

Série A, N° 908
N° d'ordre : 932

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(mention Sciences)

par

James N. JAVAHER
LL.B. - B.A. - B.S. - M.A.

1re THÈSE : Contribution à l'étude de la théorie des mesures et des erreurs.

2e THÈSE : Ensembles orthogonaux de carrés latins et le corps de galois.

Soutenues le 24 juin 1960 devant la Commission d'Examen

M. J.-L. DESTOUCHES Président

M. D. DUGUÉ
M R. DAUDEL } Examinateurs

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556011_0012

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen . . . . . J. PÉRÈS

G. Julia	T	Analyse supérieure et algèbre supér.
De Broglie	T	Théories physiques.
Prenant	T	Anatomie et histologie comparées.
Pérès	T	Mécanique des fluides et applications.
Barrabe	T	Géologie structur. et géol. appliquée.
Bourcart	T	Géographie physique et géol. dynam.
Plantefol	T	Botanique.
Grassé	T	Evolution des êtres organisés.
Prévost	T	Chimie organique.
Bouligand	T	Applicat. de l'analyse à la géométrie.
Chaudron	T	Chimie appliquée.
Wyart	T	Minéralogie.
Teissier	T	Zoologie.
Mangenot	T	Biologie végétale.
P. Auger	T	Physique quantique et relativité.
Monnier	T	Physiologie générale.
Piveteau	T	Paléontologie.
Rocard	T	Physique (E.N.S.).
H. Cartan	T	Mathématiques (E.N.S.).
Laffitte	T	Chimie générale.
Favard	T	Géométrie supérieure.
Coulomb	T	Physique du Globe.
Mlle Cousin	T	Biologie animale (S.P.C.N.).
Chrétien	T	Chimie minérale.
P. Drach	T	Zoologie.
Kastler	T	Physique (E.N.S.).
Ephrussi	T	Génétique.
Wurmser	T	Biologie physico-chimique.
Rivière	T	Géologie (S.P.C.N.) Orsay.
Gautheret	T	Biologie végétale (P.C.B.).
Lucas	T	Recherches physiques.
A. Thomas	T	Biologie celulaire.
Arnulf	T	Optique appliquée.
M. Morand	T	Enseignement de physique.
Soleillet	T	Physique (P.C.B.).
Fortier	T	Mécanique expériment. des fluides.
Danjon	T	Astronomie.
Petit	T	Biologie maritime.
Queney	T	Météorologie et dynamique atmosph.
Gallien	T	Embryologie.
Eichhorn	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
De Cugnac	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle Cauchois	T	Chimie physique.
Thellier	T	Physique du Globe.
L'Héritier	T	Génétique.
Grivet	T	Radioélectricité.
Poncin	T	Mécanique générale.
Dubreil	T	Arithmétique et théorie des nombres.
Quelet	T	Chimie organique.
Cagniard	T	Géophysique appliquée.
Champetier	T	Chimie macromoléculaire.
Cuvillier	T	Micropaléontologie.
Jung	T	Pétrographie.
Trillat	T	Microscopie et diffrac. électronique.
Wiemann	T	Chimie organique et structurale.
Jacquinot	T	Spectroscopie et physique céleste.
Vassy	T	Physique de l'atmosphère.
Destouches	T	Théories physiques.
M. Pruvost	T	Géologie.
Amiel	T	Chimie générale.
Hocart	T	Minéralogie.
J.-P. Mathieu	T	Physique (option (Orsay).
Couteaux	T	Biologie animale (P.C.B.).
May	T	Zoologie (Orsay).
Choquet	T	Théorie des fonct. et topologie.
Feldmann	T	Biologie végétale marine.
Guinier	T	Physique des solides.
Jost	T	Physiologie comparée.
Fortet	T	Calcul des probab. et physique math.
Schwartz	T	Calcul différentiel et intégral.
Chouard	T	Physiologie végétale.
Malavard	T	Aviation.
Brelot	T	Calcul différentiel.
Normant	T	Synthèse organique.
Benard	T	Chimie minérale.
Buvat	T	Botanique (E.N.S.).
Dugue	T	Statistiques mathématiques.
Geloso	T	Chimie (S.P.C.N.).
Soulairac	T	Psychophysiologie.
Ulrich	T	Physiologie végétale.
Maréchal	T	Optique théorique et appliquée.
Kirrmann	T	Théories chimiques.
Chadefaud	T	Botanique.
Mlle Le Breton	T	Physiologie générale.
Salem	T	Mathématiques générales.
Lelong	T	Mathématiques générales.
Devillers	T	Anatomie et histologie comparées.
Ehresmann	T	Topologie algébrique.
Françon	T	Physique (S.P.C.N.).
Glangeaud	T	Géogr. physique et géologie dynam.
Godement	T	Mathématiques (M.G.P.).
Pisot	T	Technique mathém. de la physique.
E. Roch	T	Géologie.
Schatzmann	T	Astrophysique.
Termier	T	Paléontologie stratigraphique.
Zamansky	T	Mathématiques générales.
Lennuier	T	Physique (M.G.P.).
Rizet		Génétique.
Routhier	T	Géologie appliquée.
Mme Tonnelat	T	Relativité.
Dixmier	T	Mathématiques (M.P.C.).
Souchay	T	Chimie générale.
Aigrain	T	Electrotechnie générale.
Brusset		Chimie minérale.
M. Levy	T	Physique théorique des htes énergies.
Mme Chaix		Chimie biologique.
Mme Hurel-Py		Biologie végétale (P.C.B.).
Piaux		Chimie (M.P.C.).
Brun	T	Mécanique expériment. des fluides.
Lederer	T	Chimie biologique.
Mme Dubreil	T	Mathématiques.
Mme Lelong	T	Mathématiques (E.N.S.).
Bellair	T	Géologie (S.P.C.N.).
Cotte	T	Physique (Orsay).
J.-E. Dubois	T	Chimie organique.
Lamotte		Zoologie (E.N.S.).
André Michel	T	Chimie (S.P.C.N.).
Olmer	T	Energétique générale.
Rouault	T	Physique générale.
Gauthier	T	Mécanique appliquée.
Barchewitz	T	Chimie physique.
Brossel	T	Physique atomique.
Buser		Physiologie comparée.
Camus		Physiologie végétale (3e cycle).
Castaing		Physique générale.
Curien		Minéralogie et cristallographie.
Moyse	T	Physiologie végétale (Orsay).
Pannetier		Chimie (S.P.C.N.).
Possompes	T	Zoologie.
Pullmann	T	Chimie théorique.
Teillac		Physique nucléaire et radioactivité.
Tonnelat		Biologie physico-chimique.
Ville	T	Econométrie.
Willemart		Chimie (P.C.B.).
Dodé	T	Chimie (S.P.C.N.) (Orsay).
Freymann	T	Physique générale.
Guinochet	T	Biologie végétale (Orsay).
Rollet	T	Chimie (P.C.B.).
Mlle Josien	T	Chimie (P.C.B.).
Chevalley	T	Géom. algébr. et théorie des groupes.
Arnoult	T	Electronique.
Chapelle	T	Physique (M.P.C.) (Orsay).
Delange	T	Mathématiques Orsay.
Deny	T	Mathématiques (M.G.P.).
Germain	T	Mécanique théorique des fluides.
G. Lucas	T	Géologie.
Allard		Chimie physique.
Berthelot		Physique nucléaire et radioactivité.
Bricard		Météorologie et phys. de l'atmosph.
Mme Albe-Fessard		Psycho-physiologie.
Friedel		Physique des solides.
M. Julia		Etudes des moléc. organ. complexes.
Lender		Biologie animale (S.P.C.N.) (Orsay).
Magat		Physico-chimie des rayonnements.
Mlle Quintin	T	Electrochimie.
Monot	T	Chimie du métabolisme.
Benoit	T	Physiologie animale.
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Haissinsky	T	Radiochimie.
Lemée	T	Physiologie (B.M.P.V.).
Guérin	T	Chimie (M.P.C.).
M. Chatelet		Chimie (S.P.C.N.).
Jean		Physique nucléaire et Radioactivité.
Mattler		Physique (S.P.C.N.).
Louis Michel		Physique théorique des hautes énerg
Rumpf		Chimie (P.C.B.).
Bergerard		Zoologie (Orsay).
Bertein		Electronique.
Bouissières		Chimie des radioéléments.
Mme Couture		Physique (P.C.B.).
Ellenberger		Géologie structurale et Géologie appliquée.
Franc		Biologie animale.
Schnell		Botanique tropicale.
Stolkowski		Physiologie générale.
Acher		Chimie biologique (Orsay).
Baudoin		Biologie animale (P.C.B.).
Beaumont		Biologie animale (S.P.C.N.).
Blamont		Géophysique Ionosphère.
Bourreau		Biologie végétale S.P.C.N. (Orsay).
D. Curie		Physique (M.G.P.).
Durand-Delga		Géologie.
Fréon		Chimie (P.C.B.).
Heller		Physiologie végétale.
Tortrat		Calcul des Probabilités.
Cailleux		Géologie (S.P.C.N.).
Magnan		Physique (M.P.C.).
Daudel		Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
Mlle Fourcroy		Biologie végétale (S.P.C.N.).

Secrétaire général ..... C. Monier

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen . . . . . M. J. PERRIN

G. Urbain	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
Ch. Maurain	T	Géodésie et géophysique.
Paul Pascal	T	Anatomie et histologie végétales.
Paul Montel	T	Géométrie des fonctions et applications.
Henri Hubert	T	Chimie minérale, chimie générale.
Maurice Fréchet	T	Géométrie supérieure, calcul différentiel.
Pierre Weiss	T	Physique générale et expérimentale.
Paul Lévy	T	Mécanique rationnelle.
Charles Fabry	T	Physique générale et expérimentale.
Jean Perrin	T	Chimie générale.
Paul Langevin	T	Physique générale et expérimentale.
Henri Mouton	T	Chimie générale.
Jean Cabannes	T	Physique générale et expérimentale.
Jean Chazy	T	Mécanique rationnelle.
Maurice Fréchet	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
Paul Pascal	T	Chimie générale.
Henri Hubert

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

P R O F E S S E U R S

Doyen ..... J. PERES

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supér.
de BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et histol. comparées
PERES	T	Mécanique des fluides et applications
BARRABE	T	Géologie structurale et Géol. appliquée
BOURCART	T	Géogr. physique et géol. dynamique
PLANTEFOL	T	Botanique
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biol. végétale
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité
MONNIER	T	Physiologie générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
H. CARTAN	T	Mathématiques (ENS)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.)
CHRETIEN	T	Chimie minérale
P. DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
WURMSER	T	Biologie physico-chimique
RIVIERE	T	Géologie (SPCN) Orsay
GAUTHERET	T	Biol. végétale (PCB)
LUCAS	T	Recherches physiques
A. THOMAS	T	Biol. cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
M. MORAND	T	Enseignement de physique
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécanique expérim. des fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Génétique
GRIVET	T	Radioélectricité
PONCIN	T	Mécanique générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres
QUELET	T	Chimie organique
CAGNIARD	T	Géophysique appl.
CHAMPETIER	T	Chimie macromolécul.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffrac. électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories physiques
M. PRUVOST	T	Géologie
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie
J.P. MATHIEU	T	Physique (option) (Orsay)
COUTEAUX	T	Biol. animale (PCB)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théor. des fonct. et topologie
FELDMANN	T	Biologie végétale marine
CUINIER	T	Physique des solides
JOST	T	Physiol. comparée
FORTET	T	Calcul des prob. et physique math.
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégr.
CHOUARD	T	Physiologie végétale

MALAVARD T Aviation
BRELOT T Calcul différentiel
NORMANT T Synthèse organique
BENARD T Chimie minérale
BUVAT T Botanique (E.N.S.)
DUGUE T Statistiques mathém.
GELOSO T Chimie (S.P.C.N.)
SOULAIRAC T Psychophysiologie
ULRICH T Physiol.Végétale
MARECHAL T Optique théorique et appliquée
KIRRMANN T Théories chimiques
CHADEFAUD T Botanique

Mle LE BRETON T Physiol. Générale

SALEM T Mathématiques générales
LELONG T Mathématiques générales
DEVILLIERS T Anatomie et Histologie comparées
EHRESMANN T Topologie algébrique
FRANCON T Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD T Géog. physique et géologie dynamique
GODEMENT T Mathématiques (M.G.P)
PISOT T Technique mathématique de la Physique
ROCH E. T Géologie
SCHATZAMM T Astrophysique
TERMIER T Paléontologie stratigraphique
ZAMANSKY T Mathématiques générales
LENNUIER T Physique (M.G.P.)
RIZET Génétique
ROUTHIER T Géologie appliquée
Mme TONNELAT T relativité
DIXMIER T Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY T Chimie générale
AIGRAIN T Electrotech.générale
M. LEVY T Physique théorique des Hautes énergies

Mme CHAIX Chimie biologique
Mme HUREL-PY Biol.Vég. (P.C.B.)
PIAUX Chimie (M.P.C.)
BRUN T Mécanique expérimentale des fluides
LEDERER T Chimie biologique
Mme DUBREIL T Mathématiques

Mme LELONG T Mathem (E.N.S.)
BELLAIR T Géologie (S.P.C.N.)
COTTE T Physique (Orsay)
DUBOIS J.E. T Chimie organique
LAMOTTE Zoologie (E.N.S.)
MICHEL André T Chimie (S.P.C.N.)
OLMER T Energétique Générale
ROUAULT T Physique générale
GAUTHIER T Mécanique appliquée
BARCHEWITZ T Chimie physique
BROSSEL T Physique atomique
BUSER Physiol. comparée
CAMUS Physiol.Vég.(3e cycle)
CASTAING Physique générale
CURIEN Minéralogie et cristallographie

MOYSE T Physiol. Vég. (Orsay)
PANNETIER Chimie (S.P.C.N.)
POSSOMPES T Zoologie
PULLMANN Chimie théorique
TEILLAC Physique nucléaire et radioactivité
TONNELAT Biol. physico-chimique
VILLE T Econométrie
WILLEMART Chimie (P.C.B.)
DODE T Chimie (S.P.C.N.)Orsay
FREYMANN T Physique générale
GUINOCHET T Biol. Vég.(Orsay)
ROLLET T Chimie (P.C.B.)
Mle JOSIEN T Chimie (P.C.B.)
CHEVALLEY T Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT T Electronique
CHAPELLE T Physique (M.P.C.)Orsay
DELANGE T Mathématiques (Orsay)
DENY T Mathématiques (M.G.P.)
GERMAIN T Mécanique théorique des fluides
LUCAS G. T Géologie
ALLARD Chimie Physique
BERTHELOT Phys. Nucl. et Radioactivité
BRICARD Météorologie et Phys. de l'atmosphaire
Mme ALBE-FESSARD Psycho-Physiol.
FRIEDEL Physique des Solides
M. JULIA Etude des Molécules organiques complexes

LENDER		Biol.Animale (S.P.C.N.) Orsay
MAGAT		Physico-chimie des Rayonn.
Mle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOT	T	Chimie du métabolisme
BENOIT	T	Physiologie animale
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT T		Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMEE	T	Physiologie B.M.P.V.
GUERIN	T	Chimie M.P.C.

SECRETAIRE GENERAL ..... C. MONIER

A Monsieur le Professeur DESTOUCHES

Avec ma profonde gratitude.

A Monsieur le Professeur DUGUE

En hommage respectueux.

AVANT-PROPOS

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur J.L. DESTOUCHES qui a bien voulu accepter l'orientation et la direction de ce travail qui n'aurait jamais vu le jour sans son aide si précieuse.

Je remercie également Monsieur le Professeur DUGUÉ de son aide et de ses conseils qui m'ont facilité la tâche.

INTRODUCTION

Depuis le début de ce siècle, la physique théorique s'est transformée en une doctrine statistique, à cause de la découverte des quanta.

C'est pourquoi nous avons divisé ce travail en deux parties : dans la première, nous avons parlé du problème de la mesure en théorie claissique et des erreurs expérimentales ; dans la deuxième nous avons développé l'interprétation statistique du formalisme de la théorie quantique et indiqué la dualité du sujet et de l'objet dans une opération de mesure, ainsi que le caractère nécessairement limité de nos informations.

On ne peut surestimer l'importance des mesures quand la plupart des lois physiques ont été établies après une longue expérimentation. Les mesures sont indispensables, en particulier dans le domaine de physique.

Dans une opération de mesure l'observateur détermine les relations de cause à effet ; pour cela, il doit s'adonner à des mesures afin d'obtenir les données qui lui sont nécessaires dans l'analyse d'une structure ou d'un système, de plus, il doit en connaître les limites de précision pour ne pas aboutir à de fausses conclusions, il

doit en outre rassembler, classer et interpréter toutes les données que lui soumet l'expérience, afin de schématiser le système projeté d'une façon satisfaisante et utile.

On peut donc définir, les mesures comme des impératifs détaillés permettant à une multitude d'éléments de coopérer effectivement dans une tâche d'exactitude.

PREMIERE PARTIE

POINT DE VUE CLASSIQUE

DIVERSES CLASSIFICATIONS DE LA MESURE

On peut classer les mesures de diverses manières. Par exemple :

a) selon la quantité mesurée : mesures géométriques, thermiques, mécaniques, électriques, de temps, etc...

b) selon la méthode employée :

- directe ou indirecte : c'est à dire que soit que nous déterminons une quantité inconnue à l'aide d'un instrument déjà étalonné, soit nous comparons la quantité à mesurer à une autre quantité prise comme étalon de référence.

Les mesures de comparaison sont utiles dans la fabrication en série quand les dimensions des objets doivent se trouver dans certaines limites de tolérance.

- estimative : appliquée dans divers domaines, en particulier, pour déterminer les taux de production d'une machine donnée. On peut classer ici les mesures d'échantillonnage dans lesquelles on se propose de déterminer

les propriétés d'une classe nombreuse d'objets à partir des mesures faites sur un lot choisi au hasard. Cette méthode nous permet, non seulement de connaître la valeur moyenne d'une propriété particulière de la classe d'objets, mais aussi l'écart pour chaque objet par rapport à cette valeur moyenne.

- instantanée ou non instantanée : certaines quantités physiques varient en fonction du temps ; par conséquent, les mesures qui les concernent doivent être instantanées. Les variations en fonction du temps peuvent être infimes, modérées ou très grandes.

Pour les mesures géométriques, l'altitude par exemple, les variations dans le temps sont négligeables. On peut donc employer des méthodes "statique". En topographie : la surface de la terre est en continuel mouvement par rapport à un niveau de référence ; un piquet enfoncé sur un versant se déplace horizontalement et verticalement de quelques centimètres par an. Ces variations sont négligeables car les mesures de topographies durent une semaine ou deux.

Quand les variations sont modérées, les différences dans les mesures, au cours du temps, ne sont pas des erreurs ; c'est la quantité mesurée qui a changé. On utilise ici un enregistrement automatique des mesures. Méthodes "quasi-statique".

Quand les variations sont grandes, comme par exem-

ple, la pression et la température dans un cylindre d'un moteur à essence, il faut non seulement un enregistrement automatique de ces grandeurs mais un réglage suivi des instruments de mesure. Méthode "dynamique".

Les problèmes qui en résultent :

Il existe des problèmes communs à toutes les mesures. Quand une mesure est faite, il faut qu'elle soit perceptible à nos sens pour pouvoir l'enregistrer (la lecture d'un thermomètre par exemple). Donc, souvent il va falloir, pour mesurer une grandeur donnée, passer par l'intermédiaire d'une grandeur différente.

Mais ce qui nous importe le plus, c'est d'abord de pouvoir exprimer la mesure faite et c'est le problème des unités de l'étalonnage des appareils de mesure, ensuite de savoir quelle est la confiance qu'on peut accorder à la mesure faite et c'est le problème des erreurs qui est l'objet de cette thèse.

a) Unités et étalonnage -

On peut exprimer toutes les grandeurs en fonction de trois grandeurs fondamentales, par exemple, la longueur (L), la masse (M), le temps (T). Pour les grandeurs électriques il convient d'ajouter l'intensité de courant et pour les grandeurs thermiques la température ; mais l'une et

l'autre peuvent être ramenées aux grandeurs fondamentales. A celles-ci il correspond évidemment des unités fondamentales, matérialisées conventionnellement par des étalons internationaux déposés au Pavillon International des Poids et Mesures à Sèvres (France).

Il serait incommode pour faire une mesure, de la comparer directement à ces étalons ; d'où la création d'étalons secondaires nationaux, copies des étalons principaux, et même à un troisième niveau et plus nombreux, des étalons "de travail". Les instruments de mesure sont étalonnés à partir de ces derniers et la comparaison entre mesure et étalon se fait au moyen de l'instrument de mesure.

1 - Unités : Les étalons sont originellement liés à des "constantes" naturelles. Le mètre était initialement la dix-millionnième partie du quart du méridien terrestre, matérialisé par une barre prismatique en métal allié, comme le méridien varie, c'est la barre métallique qui est la référence. Il en est de même du kilogramme, primitivement poids de 1000 cm3 d'eau à 4º, et qui a été matérialisé par un cylindre métallique. Quant à la "seconde", elle a été définie comme la 1/86400 partie du jour solaire moyen, qui est invariable dans le temps.

2 - Etalonnage : c'est la comparaison entre la gra-

duation d'un appareil (linéaire dans un thermomètre, circulaire dans un goniomètre) et ce qu'elle représente. On établit, point par point, des courbes d'étalonnage liées aux instruments. On porte en ordonnées, la différence entre la grandeur lue sur l'instrument et celle lue sur l'étalon ; on porte en abscisses les chiffres relatifs à la graduation. Figure 1.

Souvent il suffit d'étalonner à chaque mesure au moyen de deux opérations : la correction du zéro de la graduation (un point de référence) et la correction de l'échelle c'est-à-dire de la correspondance entre une division de la graduation et l'unité de la grandeur mesurée. Cette correspondance est généralement linéaire ou logarithmique, rarement quelqonque.

Il est des cas complexes où l'étalonnage de l'instrument doit être fait non seulement pour les points de fonctionnement mais aussi pour les conditions dans lesquelles il se trouve.

b) Introduction aux erreurs -

Il n'est pas de mesure exacte sauf le dénombrement. Il existe donc toujours une définition de la limite de précision, laquelle dépend uniquement du perfectionnement de l'appareil. Cette inexactitude est "intrinsèque". D'autre part, il existe des erreurs que nous définirons. Distinguons

auparavant, la faute de l'erreur.

1º - Faute : est dûe à l'inattention de l'expérimentateur quant à la manipulation de l'instrument, la lecture de la mesure et son enregistrement. Elle est imprévisible et quelconque : on l'élimine par la répétition de la mesure.

2º - Erreur : est prévisible et ne peut être complètement éliminée. On la réduit soit par calcul, soit par un procédé technique concernant la manipulation de l'instrument ou l'instrument lui-même ; dans tous les cas, on peut la repérer entre certaines limites.

A - Erreur systématique -

Différence entre la mesure et la valeur exacte de la grandeur mesurée, dûe à une cause qu'on peut théoriquement évaluer en grandeur et signe. Par exemple, les erreurs d'étalonnage.

B - Erreur accidentelle -

Différence entre la mesure et la valeur exacte de la grandeur dûe à une cause imprévisible ni en grandeur ni en signe. Par exemple la lecture d'une graduation. On peut considérer une cause comme accidentelle parce que la science n'arrive pas à l'expliquer autrement.

Pratiquement, dans l'interprétation des données, on groupe ensemble les erreurs systématiques qu'on connait avec une marge pour les erreurs accidentelles. D'autre part, les instruments de mesure étant assez perfectionnés, l'évaluation des erreurs est purement académique.

Les mesures en topographie :

Les Egyptiens furent les premiers à faire des mesures méthodiques de surface pour l'établissement d'un cadastre. L'instrument principal de topographie était apparemment une corde fabriquée aves soin ; les Egyptiens l'employaient pour mesurer les longueurs et les angles et connaissaient pratiquement l'angle droit dans le triangle de côtés 3, 4 et 5 bien avant Euclide. Les Grecs n'ajoutèrent rien à ces mesures mais bien entendu, ils ont établi des bases mathématiques nécessaires à toute mesure. Lorsque l'Europe sortit du Moyen-Age et que l'intérêt fut centré sur les théories scientifiques de la constitution du Système Solaire, l'homme se tourna vers la topographie pour déterminer avec précision la taille et la forme de la terre. On fit alors de grands progrès dans le dessin des instruments et dans la description des mesures et même dans l'élimination ou l'évaluation des erreurs.

On les doit aux grands savants de l'époque : Newton, Gauss, Lagrange, Laplace.

Newton ayant établi la théorie de la gravitation, il s'ensuivait que le diamètre terrestre était plus grand à l'équateur qu'aux pôles. Les géodésistes de l'époque vérifièrent cette théorie par des mesures d'arcs de longitude dans le sud de la France et en Belgique. Un arc dans les latitudes supérieures devait être plus long que l'arc vu sous le même angle, aux latitudes inférieures. Les mesures démontrèrent le contraire. On ne trouva aucune explication - on envoya des expéditions en Finlande et en Equateur de façon que la différence des mesures fût plus nette et ne soit pas masquée par des erreurs. On justifia alors, après plusieurs années de travaux, cette théorie de Newton et de plus on a été conduit à des découvertes importantes sur la gravitation et sur la constitution de l'écorce terrestre.

I - LES ERREURS SYSTEMATIQUES

Les causes générales d'erreurs systématiques sont les suivantes : les conditions ambiantes, les instruments de mesure, l'ambiguité de définition de la grandeur mesurée. Nous les examinerons successivement.

D'autre part, nous considérerons deux méthodes générales d'élimination de ces erreurs : évaluation de l'er-

reur par une mesure secondaire, mais cette mesure est aussi sujette à erreur ; ou bien compensation dûe à une technique appropriée. Il est évident qu'il est possible aussi de faire une évaluation grossière de l'erreur sans mesure.

Les conditions ambiantes -

Dans un laboratoire, les conditions ambiantes peuvent être contrôlées minutieusement et le problème ne se pose que dans le domaine que nous avons choisi, c'est-à-dire pour un travail à l'air libre.

A) Cause unique d'erreur :

En général, il s'agit de la température qui est à l'origine d'erreurs dans la mesure de distances. On fait abstraction de toute autre cause.

a. élimination par une mesure secondaire de la température t

Soit un ruban d'arpenteur, étalonné à t = T.C il mesure alors $l = L_0$ mètres. Sur le chantier, il fait une température t = T. On mesure un terrain de longueur D m.

Le ruban s'est dilaté linéairement

$$L_1 = L_0 + \Delta L$$

avec $\Delta L = L_0 \left(\frac{dl}{dT}\right)_0 \Delta T$

d'où $L_1 = L_0 \left[1 + \left(\frac{dl}{dT}\right)_0 \Delta T\right]$

$\frac{dL}{dT}$ est la variation de la longueur avec la température : $L = f(T)$ étant supposée linéaire. Dans un cas plus général on écrirait :

$$L_1 = L_o \left[1 + \frac{dL}{dT} \Delta T + \frac{1}{2} \frac{d^2L}{dT^2} \Delta T^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{d^nL}{dT^n} \Delta T^n \right]$$

On écrit pratiquement : $L_1 = L_o \ (1 + c_1 \Delta T + c_2 \Delta T^2 + \cdots + c_n \Delta T^n + \cdots)$

où c_1, c_2, $c_3 \ldots$ c_n sont des constantes qui ne dépendent que du ruban. Par conséquent D réél $>$ D mesurée. On l'obtient :

$$D \text{ réel} = D \text{ mesurée} + \text{erreur ou } D_r = D_m + \frac{D_m (e)}{L}$$

Contraction et dilatation ne sont pas les seuls effets de la température ; d'autre part, les conditions ambiantes telles que pression, degré hygrométrique, indice de réfraction.... peuvent intervenir.

b. élimin'tion par compensation :

Pour la même mesure de longueur, on utilise deux règles de même type mais de métal différent, donc de coefficient de dilatation différent. On les place dans un tube léger et bien isolé, afin qu'elles soient à la même température au moment de la mesure. D'où les deux équations, à deux inconnues L réél et T moyenne.

$$\left\| \begin{array}{l} L = L_1 \text{ mes.} + \Delta L_1 \\ L = L_2 \text{ mes.} + \Delta L_2 \end{array} \right.$$

La mesure de la température est donc éliminée par compensation.

B) Causes simultanées d'erreur -

a. causes indépendantes -

Soit la mesure de la distance entre deux points, obtenues par photographie. Les conditions ambiantes pouvant intervenir sont la température du microscope séparateur, celle de la pellicule et le degré hygrométrique de celle-ci.

$$L \text{ réél} = R + C_i\ (T_m - T_s) + C_p\ (T_m - T_e) + C_h (H_m - H_e)$$

avec : L : distance réelle sur la pellicule au moment de l'exposition.

R : distance mesurée au microscope

C_i : coefficient de dilatation relatif au microscope

C_p : " " " à la pellicule

C_h : degré hygrométrique de la pellicule

T_m : température au moment de la mesure.

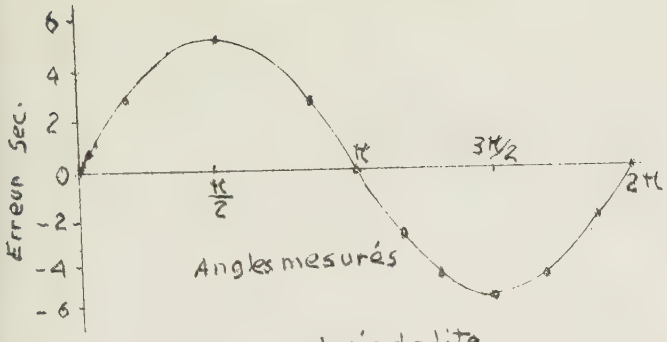
T_e : " " de l'exposition

T_s : " conventionnelle d'étalonnage

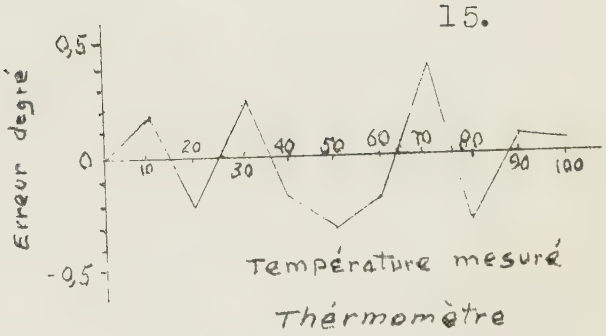
H_m : Humidité au moment de la mesure

H_e : Humidité au moment de l'exposition.

On porte en cotes en coordonnées cartésiennes, les diverses corrections apportées à la distance mesurée. Dans le plan on porte la température et l'humidité relative; comme les deux erreurs sont supposées indépendantes la sur-



Théodolite



Thérmomètre

Fig. 1

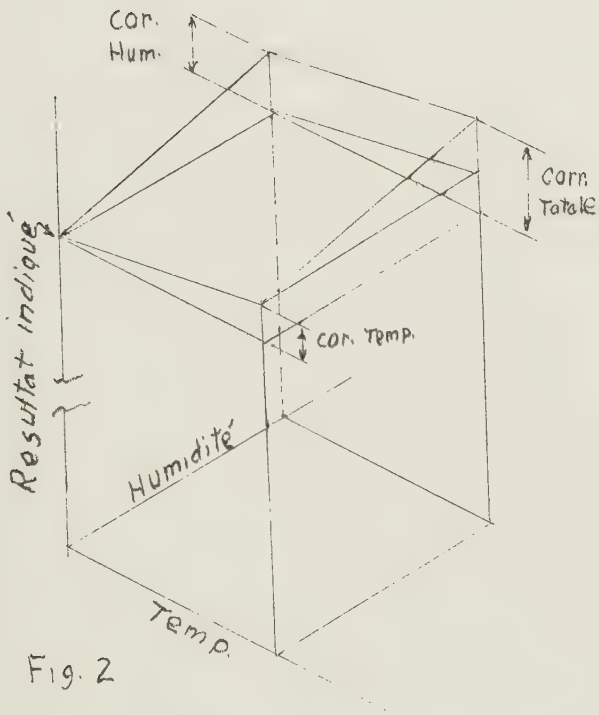


Fig. 2

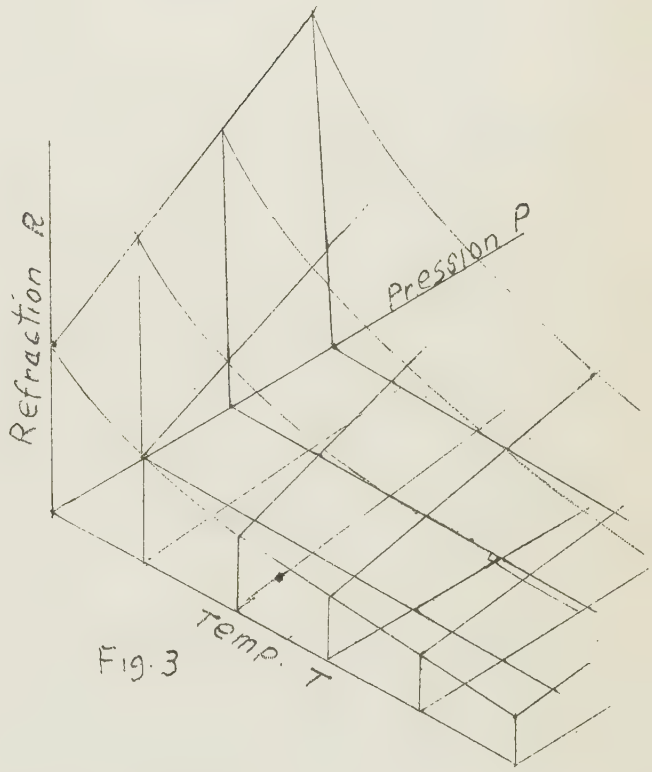


Fig. 3

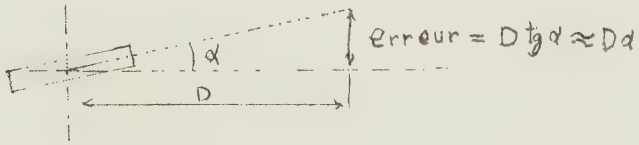


Fig. 4

face de correction est plane (figure 2).

$$\Delta Z = k_1 \Delta X + k_2 \Delta Y \quad \text{où} \quad \left\| \begin{array}{l} k_1 = C_i + C_f \\ k_2 = C_h \\ \Delta x = \Delta T \\ \Delta y = \Delta H \end{array} \right.$$

b. Causes liées -

On mesure l'angle vertical d'une étoile au-dessus de l'horizon ; mesure qui intervient dans la détermination de la station du topographe.

α_0 angle réel, α angle mesuré. On a $\alpha = \alpha_0 + \gamma$; γ étant la correction dûe à la réfraction de la lumière à travers les couches atmosphériques de densité de plus en plus grande. On suppose ces couches sphériques, concentriques de densité uniforme.

Ce γ dépend de la densité de l'air dans chaque couche, plus exactement de l'indice n de réfraction qui varie avec la densité. On démontre que $\gamma = k \frac{P}{T} \operatorname{cotg} \alpha$

pour $\alpha > 30°$ γ étant en secondes d'arc.

P : pression atmosphérique

T : température absolue

k : constante qui dépend des unités.

Nous avons $d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial P} dp + \frac{\partial \gamma}{\partial T} dT$

avec $\left\| \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma}{\partial P} = \frac{k}{T} \operatorname{cotg} \alpha \\ \frac{\partial \gamma}{\partial T} = -\frac{kP}{T^2} \operatorname{cotg} \alpha \end{array} \right.$

avec les mêmes axes de coordonnées, parce que P et T sont dépendants (figure 3), la surface de correction est gauche.

Les instruments de mesure :

Les instruments de mesure sont causes d'erreur soit par leur existence même, soit par la façon dont on les utilise. Il est à remarquer, que dans ce domaine, les erreurs systématiques et accidentelles sont imbriquées. Nous ferons abstraction des dernières pour le moment.

A) Les instruments proprement dits -

Les instruments peuvent comporter des imperfections après leur fabrication (erreur de symétrie) ; ils peuvent aussi se déformer pendant la mesure.

a. Erreur de symétrie

Soit le nivellement direct, à l'aide d'un niveau à fiole. Il s'agit de mesurer la différence d'altitude entre deux points (figure 4).

Nous avons une lunette de visée et un niveau à bulle pour en rendre l'axe horizontal, plus exactement dans le plan perpendiculaire à la verticale de la station. La ligne de visée fait un angle α au-dessus de l'horizontale ; cette erreur influe sur la mesure qu'on fait entre A et B. La station étant C.

Si la ligne de visée était horizontale, elle couperait la mire en E la visée étant faite sur A. De même F pour la visée CB.

Nous avons : $h_B - h_A = h_E - h_F$

Or on lit sur la mire h_e et h_f

d'où $\left\| \begin{array}{l} h_E = h_e - \alpha D' \\ h_F = h_f - \alpha D'' \end{array} \right.$

et $h_B - h_A = (h_e - h_f) - \alpha (D'-D'')$

On élimine la mesure angulaire α (nouvelle cause d'erreur) en faisant D' = D". Ce nivellement est suivi, si possible, par une vérification et on prend la moyenne des visées avant et arrière.

Sinon, on procède par compensation, c'est-à-dire qu'on fait deux séries d'observations avec la même instrument d'où un système de deux équations à deux inconnues, la vraie différence d'altitude et l'angle α , qu'on peut résoudre.

L'exemple suivant montre le détail de cette méthode. Il faut déterminer la différence d'élévation entre les points A et B. Il est impossible de placer l'instrument sur une ligne entre ces deux points. C'est pourquoi on le placera d'abord à 30 m. de A et à 200 m. de B. Les lectures dans cette position sont 1,137 en A et 0,422 en B. On place maintenant en un point (qui n'est pas sur une ligne entre A et B)

où il se trouve à 250m de A et 100 m. de B. La lecture de la mire dans cette position est 3,427 en A et 2,439 en B.

Nous voulons chercher la différence d'élévation réelle et l'erreur de l'angle de l'instrument. On suppose toujours que l'instrument est dans un état d'ajustement imparfait, supposons aussi que la ligne de visée fasse un angle α avec l'horizontale. La différence d'élévation véritable pour chaque position est :

Dans la position I - D.E. = $(1,137-0,422)-\alpha(30-200)$ (a)

Dans la position II - D.E. = $(3,427-2,439)-\alpha(250-100)$ (b)

Résolvons pour D.E. et nous trouverons : D.E. = 0,860 et α = 0,000853 rad. Si on le désire, après avoir fait les observations de l'exemple précédent, il est très simple d'ajuster l'instrument pour supprimer presque entièrement l'erreur de l'angle.

b. Erreur de déformations :

Au moment de l'étalonnage du ruban d'arpenteur, celui-ci est porté par deux piquets à la même altitude et maintenu par tension grâce à des dynamomètres. Il est essentiel qu'au moment de la mesure, les conditions soient exactement les mêmes.

Considérons l'effet de la tension sur le ruban d'acier. La tension est de l'ordre de T kgf. La section du

ruban est en croix et assez grande d'où la fonction charge/déformation se trouve dans le domaine élastique, donc linéaire.

La loi de Hook nous donne :

$$\Delta = \frac{TL}{wE}$$ où

T	tension du dynamomètre
L	longueur du ruban
w	section du ruban
E	module élasticité
Δ	déformation

Quand on fait varier les conditions de support, Δ est difficile à évaluer. Δ dépend du choix de la courbe d'équilibre d'un fil pesant et flexible appuyé en deux points de même altitude ; chaînette en toute rigueur, parabole en première approximation.

A l'équilibre, écrivons l'égalité des moments.

Si p est le poids du ruban par unité de longueur

Si e est la flèche prise par le ruban (figure 5).

$Te = (pD/2)(D/4)$ d'où $e = (pD^2)/8T$

L'équation de la parabole s'écrit :

$$y = \left(\frac{4e}{DD}\right)x^2$$

calculons, dans ces conditions, la longueur réelle du ruban, par rectification :

$$L = 2\int_0^{\frac{D}{2}} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx = 2\int_0^{\frac{D}{2}} \left[1 + \left(\frac{8ex}{D^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

$\frac{8ex}{D^2}$ est petit devant l'unité d'où $L = 2\int_0^{\frac{D}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{64e^2x^2}{D^4} + \dots\right)\right] dx$

$L=D\ (1+(8/3)e^2/D^2)$ ou $D=L-(p^2D^3)/24T^2$

et $\frac{p^2D^3}{24T^2}$ est la correction en lère approximation.

Un choix judicieux de la tension T, satisfera l'égalité des effets dûs, l'un au poids propre pL, l'autre à la tensionT. Comme pL et T agissent en sens contraire, les erreurs se compenseront. On trouve :

$$T_n = \sqrt[3]{\frac{\omega E (pD)^2}{24}}$$

B) Manipulation défectueuse de l'instrument

- On mesure une distance entre deux points. L'alignement du ruban ne peut être fait rigoureusement. Il y aura une déviation angulaire soit dans un plan horizontal, soit dans un plan vertical. Dans tous les cas, on mesurera l'hypothénuse d'un triangle rectangle au lieu du grand côté

$$d= \sqrt{l^2-h^2} = l \left[1-\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = l \left[1 - \frac{h^2}{2l^2} + \frac{h^4}{8l^4} - \frac{3h^6}{48l^6} + \cdots\right]$$

bien entendu, on ne gardera que le premier terme de la correction, $d = L - h^2/2L$

- Nous pouvons inclure, dans ce paragraphe, les erreurs dûes à l'effet de l'instrument lui-même sur la quantité mesurée.

L'élément indicateur d'un instrument de mesure reçoit le "signal" à partir d'une réaction sur l'objet qu'on mesure. Cette réaction implique soit une force de contact, soit un échange d'énergie. Dans la plupart des mesures topographiques, cette erreur est absolument négligeable et

nous l'écarterons.

Ambiguités de définition :

Elles peuvent être la source de certaines modifications dans la mesure d'une grandeur, mais n'entraînent pas d'erreurs dans le sens strict du terme.

A la base il apparaît une erreur dans la définition lorsque l'on détermine la différence d'élévation au moyen du Niveau de nivellement. L'axe du tube à bulle et la ligne de visée parallèle de l'instrument établissent un plan horizontal qui est perpendiculaire à la direction de gravité là où se tient l'observateur. Donc, quand nous cherchons à mesurer les différences d'élévation la donnée de référence n'est pas un plan horizontal, mais une surface appelée niveau de référence, généralement le niveau moyen de la mer. La quantité qui en fait devrait être mesurée pour déterminer la différence d'élévation entre un point B sur la terre est la quantité F ou distance normale entre les niveaux de surface passant par ces deux points. Cependant la différence d'élévation qui sera indiquée est la quantité H entre le point B et le plan horizontal établi par l'instrument. Par conséquence il faut corriger la distance E qui représente la longueur dont l'arc de rayon R' dévie par rapport à la ligne droite. Cette correction peut être calculée avec une précision suffisante d'après les re-

lations principales employées pour déterminer la correction de la pente pour les mesures effectuées avec un ruban et elle se présente comme suit : $E = D^2/2R'$. On peut prendre avec une précision suffisante le rayon R' comme rayon moyen de la terre. L'erreur augmente avec le carré de la distance. Heureusement une partie de cette erreur est compensée par les effets de la réfraction atmosphérique qui sont eux aussi directement reliés au carré de la distance mais sont de direction contraire et leur grandeur est de 1/7 de la grandeur de la correction de courbure.

Lorsque nous mesurons des angles verticaux dans des nivellements à longue distance, cette correction devient extrêmement importante, et peut dans certains cas, être calculée par des relations beaucoup plus précises que celles que nous avons développées ci-dessus. Comme dernier exemple de ce type d'erreur, considérons la façon dont nous pouvons obtenir la masse d'un objet avec une balance analytique. En employant cet instrument nous mesurons la masse de cet objet indirectement par l'intermédiaire de son poids. La masse indiquée doit être corrigée pour la valeur particulière de l'accélération de la gravité à l'endroit où l'on fait la mesure et aussi pour l'effet de la poussée de l'air puisque la force nette que l'objet exerce sur la balance est la différence entre son poids véritable et le volume de l'air déplacé par l'objet. Au premier abord cette erreur

peut paraître peu importante et c'est le cas pour les mesures ordinaires d'objets denses métalliques. Cependant lorsqu'on mesure avec plus de précision des objets d'une densité moindre, l'erreur est trop grande pour être négligée.

II - LES ERREURS ACCIDENTELLES

Toute mesure introduit un certain nombre d'erreurs qu'on ne peut déterminer ou dont on ne connait pas la cause. Si on répète la mesure, les différents résultats seront éparpillés. Quand on aura décelé les causes d'erreurs symétriques et celles d'erreurs accidentelles, et qui sont souvent les mêmes, il restera celles qui correspondent à une distribution "normale" (Gauss) : nombre infini de causes et dont l'influence est infiniment petite et d'égale probabilité.

Il ne sera question que de ces causes d'erreurs dans ce développement.

Introduction par le cheminement et le nivellement

Soit à mesurer la distance entre deux points avec un ruban d'arpenteur étalonné, tendu par un dynamomètre, appuyé sur deux supports et aligné de visée. Considérons les différentes causes d'erreurs.

A) Etalonnage : Il existe une erreur qui se réper-

cutera dans toutes les mesures. Elle est petite vis à vis de la graduation minimum du ruban. Son signe est quelconque La fréquence relative de chaque erreur sur la longueur du ruban donne la courbe en cloche.

B) Température : Les erreurs sont dûes -

a - soit à une mauvaise lecture du thermomètre (facteur humain)

b - soit à la graduation défectueuse du thermomètre.

c - soit à l'imprécision de la température moyenne effective (cas d'un ruban dont une partie est au soleil, l'autre à l'ombre).

Cette dernière erreur est prépondérante. Son signe est quelconque. Quand elle est petite sa fréquence est élevée

C) Désalignement : Ici le facteur humain est prépondérant ; l'observateur tendra à équilibrer ses mesures et on obtient une courbe de fréquence symétrique. D'autre part, la relation entre l'erreur dûe au désalignement et l'erreur totale, n'étant pas linéaire, on obtient la courbe de fréquence de l'erreur totale, qui est penchée (figure 6).

D) Tension du ruban : L'erreur est dûe : soit à la lecture imprécise du dynamomètre, c'est-à-dire erreur de flèche ; soit au frottements sur le dynamomètre et les supports.

a. La lecture de la tension donne une erreur du type "courbe de fréquence symétrique" mais la relation flèche/tension n'étant pas linéaire, nous obtenons pour l'erreur dûe à la flèche une courbe dissymétrique (figure 7).

b. Le frottement dans le dynamomètre : jusqu'à une certaine valeur de la tension il n'y a pas d'indication. Si la tension est mise graduellement, jusqu'à la valeur donnée par le calcul ; T réelle = T calculée - frottement. Si on procède par excès puis diminution de la tension : T réelle = T calculée + frottement. (figure 8).

E) Observateur : Il lit mal la graduation du ruban Marque mal la fin de chaque longueur du ruban. Nous avons une distribution symétrique de la fréquence d'erreur.

Il en va de même du nivellement où on peut analyser aussi les causes d'erreurs accidentelles et dénombrer celles qui donnent la "distribution normale".

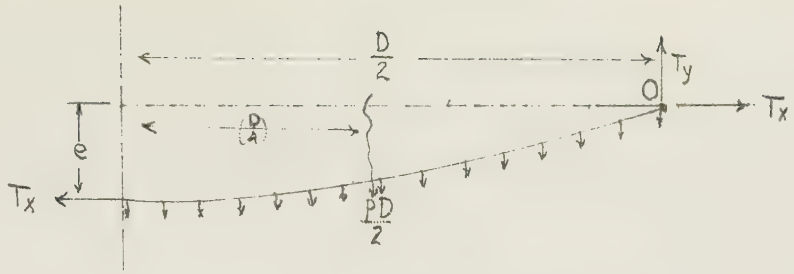
Considérations théoriques :

Notre but est de définir les limites de confiance des mesures d'une façon rationnelle. Les caractéristiques des causes d'erreurs étudiées sont :

1 - Probabilité égale d'erreur positive ou négative

2 - L'erreur grande est moins probable que l'erreur petite.

Fig. 5



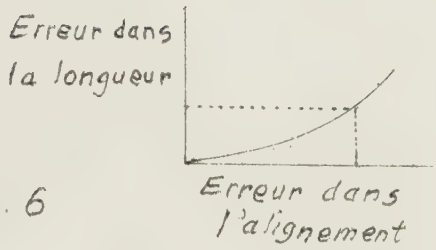
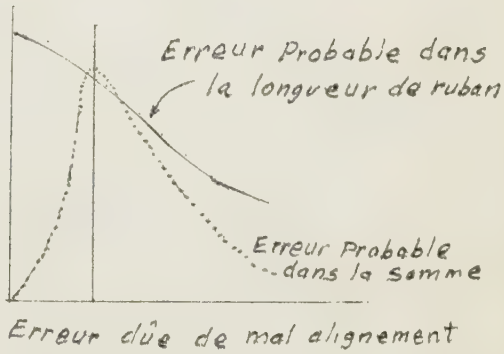


Fig. 6



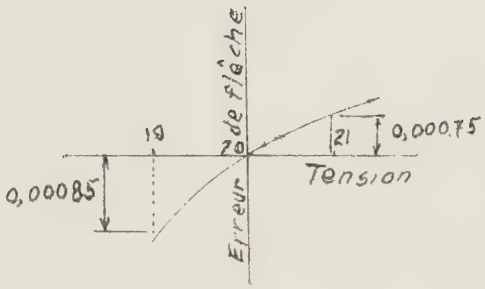
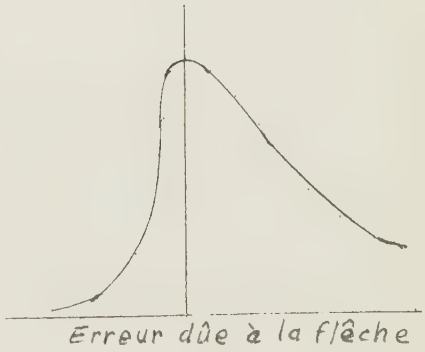


Fig. 7



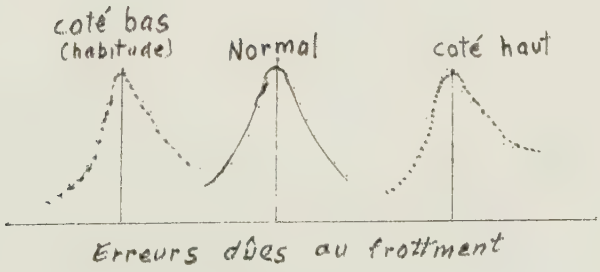


Fig. 8

3 - Instrument de mesure de précision telle qu'on puisse exprimer l'erreur en fonction de la graduation minimum.

4 - Le nombre d'observations est assez grand.

A) La distribution de Gauss -

Soit m pièces de monnaies : pile ou face. La probabilité pour que m-2n tombent sur face est :

$$P_n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{n!} (1/2)^m$$

Si q est la valeur de l'erreur unité, on pose :

$$\begin{cases} X_n = (m-2n)_q \\ Y_n = P_n \end{cases}$$

qui conduit à la courbe d'équation :

$$Y = k\, e^{-h^2X^2} \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{1}{q\sqrt{2m}}$$

k constante d'intégration. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\, e^{-h^2X^2}\, dX = 1$$

d'où :

$$\frac{k\sqrt{\pi}}{h} = 1 \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2X^2}$$

B) Les limites de confiance d'une mesure :

L'équation trouvée permet : (a) de déterminer l'erreur correspondant à une certaine probabilité. (b) de déterminer la probabilité d'une erreur dépendant d'une certaine

valeur.

La constante h dépend des mesures. On la détermine par un grand nombre de mesures. On introduit la quantité $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$ appelée écart-type, où X_i est une erreur.

On a $\sigma = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 Y \, dX}{\int_{-\infty}^{+\infty} Y \, dX} \right)^{\frac{1}{2}}$

d'où $h = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}$ et $Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} X^2}$

(a.) Soit donc un ensemble de mesures concernant une même quantité pour un ensemble infini, la moyenne arithmétique de mesures donne la vraie valeur de la grandeur. Pour un ensemble fini, la moyenne arithmétique n'est pas nécessairement la vraie valeur. Ainsi nous écrirons que nous voulons utiliser une valeur telle qu'elle ait la probabilité maximum pour être correcte. Supposons qu'une certaine valeur ait été arbitrairement choisie et l' "erreur" calculée. Maintenant, la probabilité que toute erreur X se produira, est : $P_{x_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_1^2} (\Delta x)$

La probabilité pour un ensemble d'erreurs x_1, x_2, x_3, x_4 ..... x_n à se produire est le produit de toutes les probabilités de chaque séparément ainsi :

$$P = \left[\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right]^n \left(e^{-h^2 x_1^2}\right) \cdots\cdots\cdots \left(e^{-h^2 x_n^2}\right) (\Delta x)^n$$

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2)} (\Delta x)^n$$

Maintenant P doit être maximum, le coefficient de l'exponentielle doit être minimum. Ainsi nous devons minorer $\sum (x_1^2 + \dots x_n^2)$ d'où $\frac{d \sum x^2}{dx} = 2(x_1 + \dots + x_n) = 0$

où $X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$

Ces conditions seront satisfaites si les erreurs sont calculées en supposant la moyenne arithmétique comme la valeur vraie et de plus c'est la valeur de la quantité la plus probable.

(b.) Soit plusieurs ensembles de mesures de moyennes arithmétiques M_i, i variant de 1 à s avec $M_i = \frac{1}{n}(X_{i1} + \dots X_{ij} + \dots X_{in})$

L'erreur correspondante à X_{ij} est Δ_{ij}

On appelle $\bar{X}$ la vraie valeur de la mesure pour l'ensemble i :

$$\bar{X} + \Delta_{im} = \frac{1}{n}\left[(\bar{X} + \Delta_{i1}) + \dots + (\bar{X} + \Delta_{ij}) + \dots + (\bar{X} + \Delta_{in})\right]$$

d'où :

$$\Delta_{im} = \frac{1}{n}\left(\Delta_{i1} + \dots + \Delta_{ij} + \dots + \Delta_{in}\right)$$

Plus généralement, pour les s ensembles :

$$\sum_{i=1}^{i=s} \Delta_{im}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}^2$$

d'autre part $\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}^2}{n}$

d'où $\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{s} \sigma_i^2$

Si les écarts-types sont égaux à σ : $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

On considère σ_m comme erreur sur la moyenne M_i de l'ensemble i. Donc à l'égalité $X_{ij} = M_i + \Delta_{ij}$, il correspond

$\Delta_{ij} = \sigma_m + V_{ij}$; V_{ij} est la variance. Il s'ensuit que

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} V_j^2}{n-1} \qquad \text{et} \qquad \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Remarquons que l'erreur correspondant à une probabilité de 1/2 est $E = 0{,}6745\ \sigma$ (elle comprend 50% des erreurs). Par conséquent si

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} V_j^2}{n(n-1)}}$$

on a $E_m = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} V_j^2}{n(n-1)}}$

(c.) Soit plusieurs ensembles de mesures qui n'ont pas le même écart-type σ, la probabilité totale que pour les n erreurs se produisent dans l'ensemble i, est :

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n (h_1 \cdots h_j \cdots h_n)\, e^{-\sum_{j=1}^{n} h_j^2 x_j^2} (\Delta x)^n$$

Elle sera maximum si

$$\sum_{j=1}^{n} h_j^2 x_j^2 = 0$$

La valeur la plus probable de la mesure sera : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} W_i X_i}{\sum_{i=1}^{6} W_i}$

où $W_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ d'où σ_m est E_m

C) Mesures indépendantes de quantités liées :

La somme d'un groupe de mesures indépendantes de deux quantités $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ et que les erreurs probables de chacun de ces groupes de mesures sont P_x et P_y soit à chercher l'erreur probable P_u sur la somme de $\bar{X}$ et $\bar{Y}$. En associant par paires les valeurs x', x" et y', y" : u' = x'+y'

$$\bar{U} + u' = \bar{X} + x' + \bar{Y} + y' \qquad \text{ou} \qquad u' = x' + y'$$

$$\bar{U} + u'' = \bar{X} + x'' + \bar{Y} + y'' \qquad u'' = x'' + y''$$

en ajoutant et élevant au carré $u'^2 + u''^2 = x'^2 + x''^2 + 2x''y'' + y'^2 + y''^2$ mais $\sum u^2 = \sum x^2 + 2\sum xy + \sum y$ comme $\sum xy = 0$

on a $\sum u^2 = \sum x^2 + \sum y^2$ et comme

$$\sigma^2_{\bar{U}} = \frac{\sum u^2}{n}, \quad \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sum x^2}{n}, \quad \sigma^2_{\bar{Y}} = \frac{\sum y^2}{n}$$

nous avons

$$\sigma^2_{\bar{U}} = \sigma^2_{\bar{X}} + \sigma^2_{\bar{Y}} \quad ; \quad P^2_{\bar{U}} = P^2_{\bar{X}} + P^2_{\bar{Y}}$$

d'où : $$P_{\bar{U}} = \sqrt{P^2_{\bar{X}} + P^2_{\bar{Y}}}$$

Pour un produit de 2 quantités observées : $\bar{U} = \bar{X}.\bar{Y}$

$$\bar{U} + u' = (\bar{X} + x')(\bar{Y} + y') = \bar{X}\bar{Y} + x'\bar{Y} + y'\bar{X} + x'y'$$

$$u' = x'\bar{Y} + y'\bar{X} \qquad \sum u^2 = \bar{Y}^2 \sum x'^2 + \bar{X}^2 \sum y'^2$$

$$\sigma^2_{\bar{U}} = \bar{Y}\,\sigma^2_{\bar{X}} + \bar{X}\,\sigma_{\bar{Y}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sigma^2_{\bar{U}}}{\bar{U}^2} = \frac{\sigma^2_{\bar{X}}}{\bar{X}^2} + \frac{\sigma^2_{\bar{Y}}}{\bar{Y}^2}$$

Pour des fonctions puissances $\bar{U} = A\bar{X}^{\alpha}$ $\qquad u' = Ax'^{\alpha}$

$$\bar{U} + u' = A(\bar{X} + x')^{\alpha} = A\left[\bar{X}^{\alpha} + \alpha\bar{X}^{(\alpha-1)}x' + \cdots\cdots\right]$$

$$u' = A^{\alpha}x'\bar{X}^{\alpha-1} \qquad \sum u^2 = A^2\alpha^2 \sum x^2 \bar{X}^{(2\alpha-2)} = \frac{\alpha^2\bar{U}^2}{\bar{X}^2}\sum x^2$$

$$\frac{\sigma^2_{\bar{U}}}{\bar{U}^2} = \alpha^2 \frac{\sigma^2_{\bar{X}}}{\bar{X}^2}$$

Pour une fonction quelconque $\bar{U} = f(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \ldots\ldots \bar{Q})$

ainsi $\bar{U} + u' = f(\bar{X} + x', \bar{Y} + y', \bar{Z} + z', \cdots\cdots, \bar{Q} + q')$

$$\bar{U} + u' = f(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \cdots\cdots \bar{Q}) + \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\bar{U}} x' + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{\bar{U}} y' + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_{\bar{U}} z' + \cdots\cdots \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_{\bar{U}} ? \qquad \text{où} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\bar{U}}$$

est la dérivée partielle de la fonction par rapport à X évaluée au point $U = \bar{U}$

d'où :

$$u' = \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\bar{U}} x' + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{\bar{U}} y' + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_{\bar{U}} z' + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_{\bar{U}} q'$$

en élevant au carré

$$u'^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2_{\bar{U}} x'^2 + 2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\bar{U}}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{\bar{U}} x'y' + 2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\bar{U}}\left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_{\bar{U}} x'z' + \cdots\cdots$$
$$+ \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2_{\bar{U}} y'^2 + \cdots\cdots \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2_{\bar{U}} z'^2 + \cdots\cdots\cdots$$

en ajoutant tous les ensembles de valeurs, comme $\sum x'y' = 0$

$\sum x'z' = 0 \ldots.$ $\quad 2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\bar{U}}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{\bar{U}} \sum x'y' = 0$

$2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\bar{U}}\left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_{\bar{U}} \sum x'z' = 0$ etc.

On a

$$\sum u^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2_{\bar{U}} \sum x^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2_{\bar{U}} \sum y^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2_{\bar{U}} \sum z^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)^2_{\bar{U}} \sum q^2$$

ainsi $$\sigma^2_{\bar{U}} = \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2_{\bar{U}} \sigma^2_{\bar{X}} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2_{\bar{U}} \sigma^2_{\bar{Y}} + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2_{\bar{U}} \sigma^2_{\bar{Z}} + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)^2_{\bar{U}} \sigma^2_{\bar{Q}}$$

ou $$p^2_U = \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2_{\bar{U}} p^2_{\bar{X}} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2_{\bar{U}} p^2_{\bar{Y}} + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2_{\bar{U}} p^2_{\bar{Z}} + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)^2_{\bar{U}} p^2_{\bar{Q}}$$

Cette expression peut être établie ainsi : l'erreur probable dans une fonction dérivée est la racine carrée de la somme des carrés des erreurs partielles si chacune des quantités observées est entrant dans la fonction multipliée par sa dérivée partielle en respect du carré de la fonction. On doit noter que cette relation contient seulement la propagation des erreurs accidentelles.

Application pratique à la mesure d'angles horizontaux :

Comment appliquer le modèle mathématique vu ci-dessus ? Les causes d'erreurs accidentelles se classent en causes connues mais non prévisibles et en causes inconnues mais possibles. Nous procéderons donc ainsi :

1 - éliminer ou corriger l'erreur systématique

2 - éliminer les erreurs accidentelles particulières

3 - Enfin faire un grand nombre de mesures pour que l'observation ait un sens statistique et employer un instrument assez précis pour que le calcul entrepris ait une signification.

A) Mise en place :

Soit un goniomètre fixé au point A par un centrage à l'aide du fil à plomb et par un nivellement à l'aide de niveau à bulle et de vis micrométrique. On vise en B et en C une mire verticale graduée. Le vernier du cercle horizontal peut, suivant le gionomètre utilisé, distinguer la minute, vingt secondes ou la seconde.

B) Erreurs systématiques :

Elles sont dues à l'instrument : ce sont des déviations angulaire α ou des excentricités e

1 - l'axe du cercle gradué doit être l'axe vertical de l'instrument : déviation anglulaire α_1 par rapport à la verticale et excentricité e_1 négligeable.

2 - L'axe de chaque niveau doit être orthogonal à l'axe vertical : déviation α_2

3 - l'axe horizontal coupe perpendiculaire l'axe vertical : excentricité e_2 entre les deux axes de quelques millièmes de centimètre, donc négligeable ;

4 - La ligne de visée doit être parallèle à l'axe de la lunette α_3 et couper les axes : - horizontal perpendiculairement, d'où la déviation possible α_4 - vertical, sinon excentricité e_3 importante et variable dans le temps.

Le vernier étant mis au zéro pour la visée de B, ou vise C et on lit θ' - l'angle vrai est

$\theta = (\theta' + \Delta_2) - (0 + \Delta_1)$ avec : $\Delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{e_3}{d_1}$ $d_1 = AB$

$\Delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{e_3}{d_2}$ $d_2 = AC$

Si $d_1 = d_2$ $\theta = \theta'$ difficile à rendre

nous avons en général de petits angles et on confond Δ avec $\frac{e}{d}$ d'où :

$$\theta = \theta' - e_3 \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2}$$

bien entendu l'erreur est négligeable pour des visées lointaines mais considérable dans le bâtiment.

C) Erreurs Accidentelles

Elles sont dûes aux différentes causes suivantes :

1 - mise au zéro du vernier et lecture du cercle horizontal.

2 - centrage de l'instrument en A

3 - visée de la mire

4 - fixation de la mire

5 - Diverses graduations de l'instrument et conditions ambiantes.

Pour réduire ces erreurs, soit on les estime statistiquement par la répétition des mesures, soit on les calcule d'abord, puis on procède à l'estimation. Nous prendrons le second cas.

Soit l'opération suivante concernant une visée à 100 m.

a. goniomètre :

-distingue la minute

-verticalité : $\pm$ 0,2 cm d'où erreur sur l'angle horizontal de $2\sqrt{2} \times 10^{-5}$ rad. soit 5,5"

-mise en zéro du vernier : $\pm$ 10"

lecture de la graduation du cercle horizontal $\pm$ 4"

b. à la visée :

-fixation de la mire de 2 m. : $\pm$ 0,5 cm

verticalité : $\pm$ 1 cm, en supposant qu'on vise au milieu de $\pm$ 0,5 cm d'où une erreur de 10^{-4} rad. soit 19.4"

-on vise à 100 m. la mire de 5 cm de largeur : $\pm$ 5 cm d'où une erreur de 5×10^{-5} rad, soit 9,7" et avec la réfraction de 1" on a 10,7"

Toutes ces opérations correspondant à n = 2 mesures ; mise au zéro du vernier (1 lecture) et la lecture du cercle (2 lectures).

L'erreur probable est :

$$E = \pm \sqrt{10^2 + 2x4^2 + 4(5,5^2 + 19,4^2 + 10,7^2)}$$

$$E = \pm \ 47''$$

L'angle est lu avec une précision de $\pm$ 15" d'où l'erreur pour une mesure est 23,5 + 15 = 38,5"

Cas de n = 6 : $p^2 = (12 \,/\, \text{centrage})^2 + (\,/\, \text{fixation})^2 + (\sqrt{24} \,/\, \text{visée})^2 + (\sqrt{24} \,/\, \text{mire})^2 + (\sqrt{2} \,/\, \text{graduation})^2$

Remarquer que l'augmentation de la précision n'est pas dans la proportion du nombre de répétitions, car les erreurs dûes aux limitations de la graduation minimum effective sont devenues insignifiantes en regard des causes accidentelles.

III - MESURES A PARAMETRES LIES

Une série d'observation (p) d'un phénomène physique, régi par une loi connue dépendant de n paramètres, est dite à "paramètres liés" si $p > n$. Elle permet l'ajustement des mesures c'est-à-dire l'approximation, la meilleure. L'ajustement ne permet pas d'atteindre la valeur exacte recherchée.

A) Ajustement approché :

Son but est de jauger les calculs et les corrections faites. Soit un parcours JKLMNO dont les sommets J et O sont déjà déterminés. On détermine les quatre autres à partir de J avec des mesures d'angles et de distances. A partir de KLMN, on calcule les coordonnées de O : On trouve O' dont l'écart par rapport à O est ΔX et ΔY. Toutes les erreurs concernant toutes les mesures faites, ont pour conséquence l'écart OO'.

On suppose que toute erreur systématique est éliminée des mesures angulaires. Nous avons alors $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 0$

- De plus l'écart angulaire peut être également partagé entre tous les angles. Les erreurs rémanentes pourront se représenter d'une façon égale en tous les sommets du parcours.

De nouveaux calculs conduisent à une erreur inférieure "erreur de fermeture".

B) Ajustement précis :

Soit une quantité mesurée fonction de n paramètres X_1, X_2, X_3 .... X_n. La probabilité que la mesure soit correcte est :

$$p = \left[p(X_1) \ldots\ldots\ldots p(X_n)\right] \cdot \Delta X^n$$

- Si chaque paramètre suit la loi de Gauss et si tous les écarts-types sont égaux :

$$p = C\, e^{-h^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2} (\Delta X^n) \text{ maximum pour } \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \text{ minimum}$$

- si les écarts-types sont différents

$$p = (C_1 . C_2 \ldots\ldots\ldots C_n)\, e^{-(h_1^2 X_1^2 + \ldots\ldots + h_1^2 X_1^2 + \ldots + h_n^2 X_n^2)} \Delta X^n$$

maximum pour $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 X_i^2 = \text{minimum.}$

soit, en introduisant les variances :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} V_i^2}{\partial V_i} = 0$$

avec i = 1, 2 ....., n

C) Exemples d'application :

1 - Soit un triangle ABC -

$$\begin{cases} \text{relation} & A + B + C = 180^\circ \\ \text{mesure} & (A + v_a) + (B + v_b) + (C + v_c) = 180^\circ \end{cases}$$

l'erreur étant $E = v_a + v_b + v_c$

Condition de probabilité maximum : $v_a^2 + v_b^2 + v_c^2$ minimum

$$\frac{\partial V^2}{\partial V_a} = 0 = 4v_a + 2v_b - 2E = 0$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial V_b} = 0 = 4v_b + 2v_a - 2E = 0$$

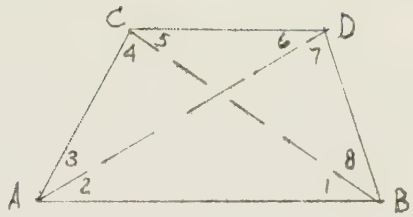
d'où $v_a = v_b = v_c = E/3$

2 - Soit un quadrilatère ABCD :

On a mesuré le côté AB et les angles 1 jusqu'à 8

Il s'agit de déterminer C et D.

Nous avons les conditions :



$$\sum_{i=1}^{i=8} i = 360^g$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 180^g$$

$$1 + 2 + 7 + 8 = 180^g$$

$$\frac{\sin 1}{\sin 4} \times \frac{\sin 3}{\sin 6} \times \frac{\sin 5}{\sin 8} \times \frac{\sin 7}{\sin 2} = 1$$

Les mesures qui ont été faites ne satisfont pas ces conditions il y a des écarts v.

$$\sum_{i=1}^{i=8} (i+v_i) = 360^g$$

$$(1+v_1) + (2+v_2) + (3+v_3) + (4+v_4) = 180^g$$

$$(1+v_1) + (2+v_2) + (7+v_7) + (8+v_8) = 180^g$$

$$\sum_{i=1}^{7} \log \sin (i+v_i) = \sum_{j=2}^{8} \log \sin (j+v_j) \quad \text{d'où} \begin{cases} i & \text{impair} \\ j & \text{pair} \end{cases}$$

angles observés.

Ces relations s'écrivent en fonction des erreurs :

$$\sum_{i=1}^{8} v_i = 360^g - \sum_{i=1}^{i=8} i$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 180^g - (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$v_1 + v_2 + v_8 + v_7 = 180^g - (1 + 2 + 8 + 7)$$

$$D_1v_1 + D_3v_3 + D_5v_5 + D_7v_7 - D_2v_2 - D_4v_4 - D_6v_6 - D_8v_8 =$$

$$\sum \log \sin \text{angles imparis} - \sum \log \sin \text{angles pairs}$$

(D = diff. de logarithme par seconde)

Il y a donc 4 erreurs indépendantes uniquement : soit v_1, v_2, v_3, v_4.

Alors :

$$v_5 = f_1\ (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$$
$$v_6 = f_2\ (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$$
$$v_7 = f_3\ (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$$
$$v_8 = f_4\ (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$$

et $\sum_{i=1}^{i=8} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2$

d'où les équations normales donnent la condition de probabilité maximum ; minimum de l'erreur.

$$\frac{\partial \sum_i V_i^2}{\partial V_1} = 2V_1 + 2\frac{\partial f_1}{\partial V_1} f_1 + 2\frac{\partial f_2}{\partial V_1} f_2 + 2\frac{\partial f_3}{\partial V_1} f_3 + 2\frac{\partial f_4}{\partial V_1} f_4 = 0$$

$$\frac{\partial \sum_i V_i^2}{\partial V_2} = 2V_2 + 2\frac{\partial f_1}{\partial V_2} f_1 + 2\frac{\partial f_2}{\partial V_2} f_2 + 2\frac{\partial f_3}{\partial V_2} f_3 + 2\frac{\partial f_4}{\partial V_2} f_4 = 0$$

$$\frac{\partial \sum_i V_i^2}{\partial V_3} = 2V_3 + 2\frac{\partial f_1}{\partial V_3} f_1 + 2\frac{\partial f_2}{\partial V_3} f_2 + 2\frac{\partial f_3}{\partial V_3} f_3 + 2\frac{\partial f_4}{\partial V_3} f_4 = 0$$

$$\frac{\partial \sum_i V_i^2}{\partial V_4} = 2V_4 + 2\frac{\partial f_1}{\partial V_4} f_1 + 2\frac{\partial f_2}{\partial V_4} f_2 + 2\frac{\partial f_3}{\partial V_4} f_3 + 2\frac{\partial f_4}{\partial V_4} f_4 = 0$$

Par exemple j'ai trouvé dans une expérience de l'ajustement d'un quadrilatère :

1. 19º 35' 58,0"	5. 19º 07' 55,9"
2. 18º 25' 52,7"	6. 18º 53' 44,3"
3. 121º 43' 16,3"	7. 18º 24' 28,3"
4. 20º 14' 56,9"	8. 123º 33' 44,3"

Conditions : $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+v_6+v_7+v_8 = -1,7''$

$v_1+v_2+v_3+v_4 = -3,9''$

$v_1+v_2+v_7+v_8 = -3,3''$

$$5{,}91v_1 - 1{,}30v_3 + 6{,}07v_5 + 6{,}33v_7 - 6{,}32v_2 - 5{,}71v_4 - 6{,}15v_6 + 1{,}39v_8 = -8$$

Résolvons pour éliminer v_4, v_6, v_7, v_8

d'où

$$v_4 = -v_1 - v_2 - v_3 - 3{,}9$$
$$v_6 = v_1 + v_2 - v_5 + 5{,}5$$
$$v_7 = 0{,}83v_1 + 1{,}65v_2 - 0{,}89v_3 - 2{,}48v_5 + 4{,}89$$
$$v_8 = 0{,}17v_1 - 2{,}65v_2 + 0{,}89v_3 + 2{,}48v_5 - 8{,}19$$

Carrés ajoutés :

$$\sum_{i=1}^{i=8} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + (-v_1 - v_2 - v_3 - 3{,}9)^2 + v_5^2 + (v_1 + v_2 - v_5 + 5{,}5)^2 + (0{,}83v_1 + 1{,}65v_2 - 0{,}89v_3 - 2{,}48v_5 + 4{,}89)^2 + (0{,}17v_1 - 2{,}65v_2 + 0{,}89v_3 + 2{,}48v_5 - 8{,}19)^2$$

Formons les équations normales, en utilisant le schéma :

$$\sum [aa] V_1 + \sum [ab] V_2 + \sum [ac] V_3 + \sum [ad] V_4 + \sum ak = 0$$

$$\sum [ba] V_1 + \sum [bb] V_2 + \sum [bc] V_3 + \sum [bd] V_4 + \sum bk = 0$$

$$\sum [ca] V_1 + \cdots\cdots$$

v_1:	v_1	v_2	v_3	v_5	k
	1				
	1	1	1		3,90
	1	1		-1	5,50
	0,69	-1,37	0,74	2,06	-4,06
	0,03	0,45	-0,15	-0,42	1,37
(1)	$3{,}72v_1$ +	$1{,}08v_2$ +	$1{,}59v_3$ +	$0{,}64v_5$	$+6{,}70=0$

	v_1	v_2	v_3	v_5	k
v_2:		1			
	1	1	1		3,90
	1	1		-1	5,50
	-1,37	2,72	-1,47	-4,09	8,06
	0,45	7,03	-2,36	-6,57	21,65
(2)	$1,08v_1$ +	$12,75v_2$ -	$2,83v_3$ -	$11,66v_5$ +	39,11=0
v_3:			1		
	1	1	1		3,90
	0,74	-1,47	0,79	2,20	-4,35
	-0,15	-2,36	0,79	2,20	-7,49
(3)	$1,59v_1$ -	$2,83v_2$ +	$3,58v_3$ +	$4,40v_5$	-7,74=0
v_5:				1	
	-1	-1		1	-5,50
	2,06	-4,09	2,20	6,15	-12,10
	-0,42	-6,57	2,20	6,15	-20,15
(4)	$0,64v_1$ -	$11,66v_2$ +	$4,40v_3$ +	$14,30v_5$	-37,75=0

Résumés :

$$3,72v_1 + 1,08v_2 + 1,59v_3 + 0,64v_5 + 6,70 = 0$$

$$1,08v_1 + 12,75v_2 - 2,83v_3 - 11,66v_5 + 39,11 = 0$$

$$1,59v_1 - 2,83v_2 + 3,58v_3 + 4,40v_5 - 7,74 = 0$$

$$0,64v_1 - 11,66v_2 - 4,40v_3 + 14,30v_5 - 37,75 = 0$$

En résolvant ces 4 équations simultanées, nous avons :

$v_1 = -1,38$ $\quad v_2 = -1,82$ $\quad v_3 = -0,25$ $\quad v_5 = 1,29$

Les corrections peuvent être calculées ainsi, en valeurs rondes

$v_1 = -1,4''$ $\quad v_2 = -1,8''$ $\quad v_3 = -0,2''$ $\quad v_4 = -0,4''$

$v_5 = 1,3''$ $\quad v_6 = 1''$ $\quad v_7 = 0,0''$ $\quad v_8 = -0,1''$

L'exemple précédent convaincra que si le nombre de quantités observées est grand, un grand travail est nécessaire dans la solution des équations normales. Ce travail est raccourci par une sélection de certains paramètres autre que ceux des quantités observées et qui sont moins nombreux, facile à relier aux observations et suffisantes pour décrire la configuration du système. On notera que dans tous ces cas, la fonction rendue minimum est toujours la somme des carrés des corrections des quantités observées, sans s'occuper des paramètres introduits.

3 - Soit un tétraèdre ABCD

A partir des trois points connus ABC, on vise le point D ce qui donne les azimuts α_1, α_2, α_3 : figure 1. En projection plance (plan ABC) ces directions doivent théoriquement se couper au point D. Mais étant donnée les erreurs d'observations, elle forment un triangle. Soit D' un point de ce triangle, position supposée du point D cherché. En coordonnées rectangulaires planes $DD' \left\| \begin{matrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{matrix} \right.$ (figure 2).

Les écarts angulaires étant v_1, v_2, v_3, l'expression $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ doit être minimum pour que D soit la position la plus probable.

Soit α l'azimut mesuré à partir de l'une quelconque des trois stations A,C,B. Nous avons la disposition suivante entre les directions : Observée, supposée et celle qui semble la plus probable. figure 3.

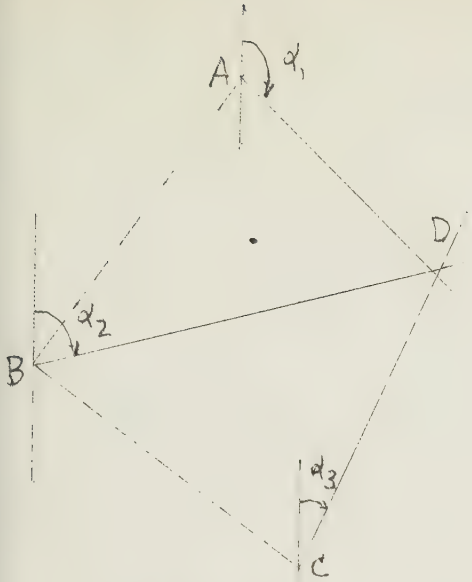


Fig. 1

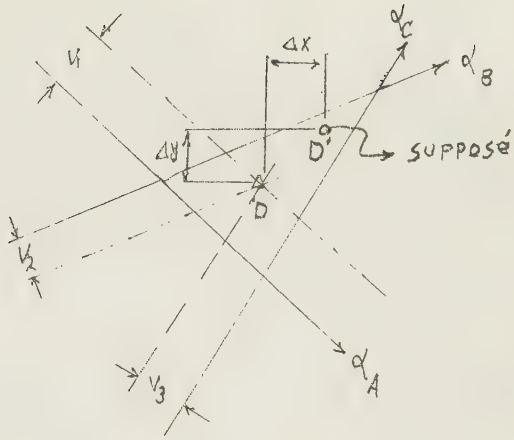


Fig. 2

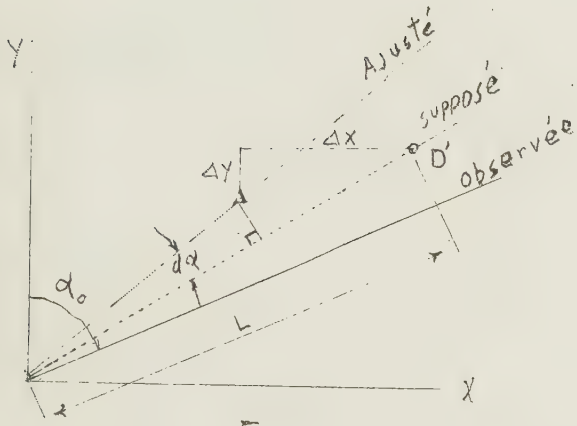


Fig. 3

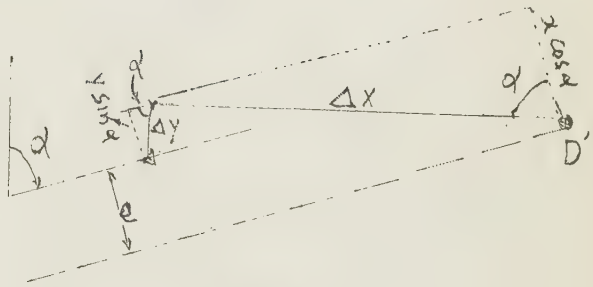


Fig 4

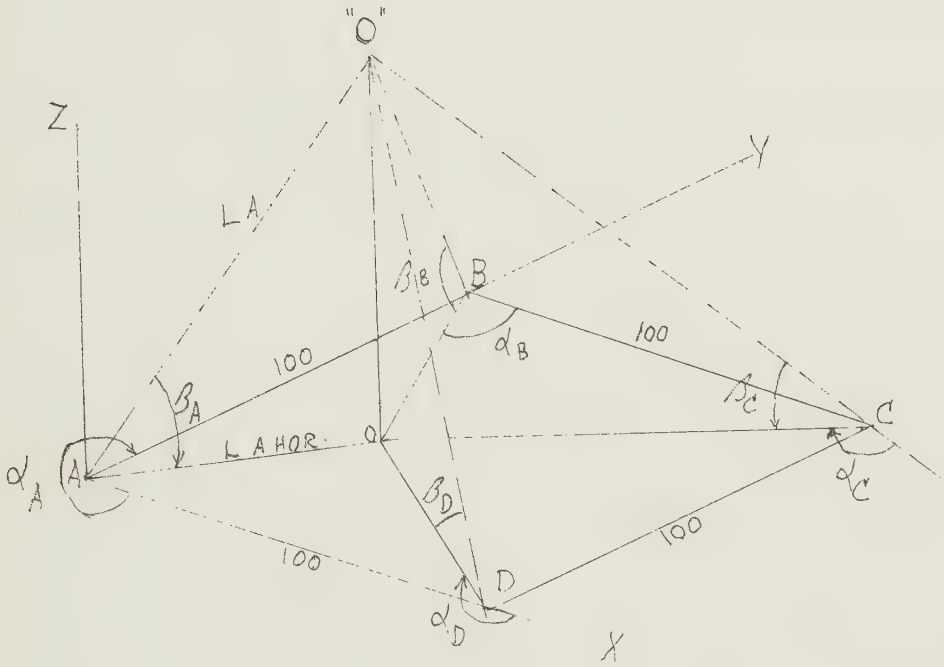
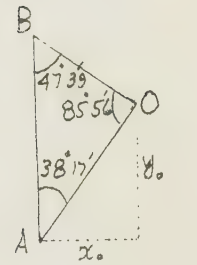
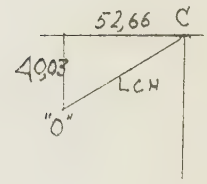
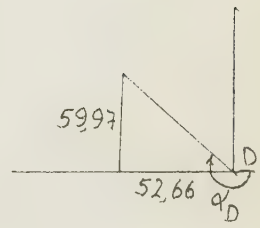

"O"
Z
Y
X
L A
L A HOR.
100
100
100
100
A
B
C
D
O
β_A
β_B
β_C
β_D
α_A
α_B
α_C
α_D

Fig. 5


B
O
A
47°39'
85°56'
38°17'
y_o
x_o


52,66
C
49,03
L CH
"O"


59,97
D
52,66
α_D

$d\alpha$: écart angulaire entre directions azimutales supposée (D') et probable (D)

v : écart angulaire entre directions azimutales observée et probable (D).

Nous avons, d'après la figure 4, la relation :

$$d\alpha = \frac{e}{L} \quad : L \text{ distance de la station au point D}$$

$$e = (\Delta X \cos\alpha - \Delta Y \sin\alpha)$$

d'où $$d\alpha = \frac{1}{L}(\Delta X \cos\alpha - \Delta Y \sin\alpha)$$

d'autre part $$v = (\alpha_{\text{supposée}} - \alpha_{\text{observé}}) + d\alpha$$

d'où les trois valeurs de v : $v_i = (\alpha_{i\,\text{supp.}} - \alpha_{i\,\text{obs.}}) + \frac{1}{L_i}(\Delta X \cos\alpha_i - \Delta Y \sin\alpha_i) \quad i = 1, 2, 3,$

et, les variables étant ΔX et ΔY, nous avons

$$\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{i=3} V_i^2}{\partial \Delta X} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{i=3} V_i^2}{\partial \Delta Y} = 0 \end{array} \right.$$

Résultat d'une expérience d'ajustement d'un point "O" par variation de coordonnées : figure 5.

Observations :

α_A	= 38º 17' - 270º = 308º 17'	β_A	=42º19'
α_B	= 132º 21' - 90º = 42º 21	β_B	=48º12'
α_C	= 142º 41'	β_C	=46º21'
α_D	= 228º 48'	β_D	=41º08'

1) Calcul de la position du point "O" par α_A, α_B et β_A

179 60	$\log L_{AH}$	= 1,883109
α_B = 132 21	$\log tg\ \beta_A$	= 9,959262
47º 39'	$\log z_o$	= 1,842371
	z_o	= 69,59
47º 39'	$\log \cos \beta_A$	= 9,868900
38º 17'	$\log L_A$	= 1,014209 L_A = 103,33
85º 56'		

log 100 =	2,000000		
log sin 47º39' =	9,882014		
	1,882014		
log sin 85º56' =	9,998905		
log $L_{A\ HOR}$ =	1,883109	=	1,883109 L_{HA}=76,40
log sin 38º17' =	9,792077	log cos 38º 17' =	9,894846
log X_o	1,675186	log Y_o =	1,777955
	47,34		59,97

2) Calcul d'azimuts "supposés

Pour point A : $\alpha_{A\ supp.}$ = observé

Pour point B : α_{B} supp. = observé

Pour β_B supposé : nous avons :

$\log 100 = 2,000000$

$\log \sin 38º17' = 9,792077$

$1,792077$

$\log \sin 85º56' = 9,998905$

$\log L_{BH} = 1,793172$

$L_{BH} = 62,11$

$tg\ \beta_B = \frac{Z_o - Z_B}{L_{BH}} = \frac{69,56-0}{62,11}$

$\log 69,56 = 1,842371$

$\log L_{BH} = 1,793172$

$\log tg\ \beta_B = 0,049199$

$\beta_B = 48'\ 14'$

$\log \cos \beta_B = 9,823539$

$\text{Log } L_B = 1,969633, L_B = 93,25$

Pour point "C"

$X_c = +\ 100,00$ $\quad Y_c = 100,00$ $\quad Z_c = 0$

$X_o = 41,34$ $\quad Y_o = 59,97$ $\quad Z_o = 69,56$

$52,66$ $\quad 40,03$

$\text{Log } 40,03 = 1,602386$

$\text{Log } 52,66 = 1,721481$

$\text{Log } (-tg\ \alpha) = 9,880905$

$180º - \alpha = 37º\ 14'$ $\quad \alpha_c = 142º\ 46'$

$\text{Log } \sin \alpha = 9,781800$

$\text{Log } L_{CH} = 1,820586$ $\quad L_{CH} = 66,16$

$\text{Log } 69,56 = 1,842371$

$\text{Log } tg\ \beta_c = 0,021785$ $\quad \beta_c = 46º\ 26'$

$\text{Log } \cos \beta_c = 9,838344$

$\text{Log } L_c = 1,982242$ $\quad L_c = 95,99$

Pour point "D"

$X_D = 100,00$	$Y_D = 0$	$Z_D = 0$
$X_o = 47,34$	$Y_o = 59,97$	$Z_o = 69,56$
52,66	59,97	69,56

Log 59,97 = 1,777955
Log 52,66 = 1,721481
Log (tg α) = 0,056474
α = 48º 43' α_D = 228º 43'

Log sin α = 9,875904
Log L_{DH} = 1,902051 L_{DH} = 79,81
Log 69,56 = 1,842371
Log tg β_D = 9,940320
β_D = 41º 05'

Log sin β_D = 9,877230
Log L_D = 2,024821 L_D = 105,88

3) Calcul d α ; d β termes constants

308º 17' sin 1' = 0,000291

Pour point "A" α = 51º 43' β = 42º 19'

$$d\alpha_A = \frac{\sin\alpha}{\sin 1' \, L_H} \Delta X - \frac{\cos\alpha}{\sin 1' \, L_H} \Delta Y = \frac{\sin 308º17'}{(0,000291)\ 76,40} \Delta X -$$

$$\frac{\cos 308^\circ\ 17'}{(0{,}000291)\ 76{,}40} \triangle Y = 35{,}32 \triangle X - 27{,}88 \triangle Y$$

$$d\beta_A = \frac{1}{\sin 1'\ L_A}\left\{\triangle Z \cos\beta - \left[\triangle X \operatorname{Cos} d\alpha + \triangle Y \sin\alpha\right] \sin\beta\right\}$$

$$= 24{,}6 \triangle Z - 13{,}8 \triangle X - 17{,}5 \triangle Y$$

Pour point "B" $\alpha = 42^\circ 21'$ $\beta = 48^\circ 14'$ $L_B = 93{,}25$

$L_{BH} = 62{,}11$

$d\alpha_B = -37{,}2 \triangle X - 40{,}8 \triangle Y$

$d\beta_B = 24{,}5 \triangle Z - 20{,}3 \triangle X + 18{,}5 \triangle Y$

Pour point "C" $\alpha = 228^\circ\ 43'$ $\beta = 41^\circ\ 05'$ $L_D = 105{,}88$

$\alpha = 48^\circ\ 43'$ $L_{DH} = 19{,}81$

$d\alpha_C = 32{,}3 \triangle X + 28{,}4 \triangle Y$

$d\beta_C = 24{,}4 \triangle Z + 14{,}1 \triangle X - 16{,}0 \triangle Y$

4) Formons les équations d'observations :

$$A_{Zi\ obs.} + V = AZI_{supp.} + d\alpha$$

$$V = (supp. - obs.) + d\alpha$$

Nous avons :

	Constant	ΔX	ΔY	ΔZ
$v_{A\alpha}$	0,0	35,2	- 27,8	
$v_{B\alpha}$	0,0	-37,2	- 40,8	
$v_{C\alpha}$	5,0	-31,4	41,3	
$v_{D\alpha}$	-5,0	32,3	28,4	
$v_{A\beta}$	0,0	-13,8	- 17,5	24,6
$v_{B\beta}$	2,0	-20,6	- 18,5	24,5
$v_{C\beta}$	5,0	20,6	15,7	24,7
$v_{D\beta}$	-3,0	14,1	- 16,0	24,4

Equations normales en ΔX, ΔY, ΔZ sont :

	$(\Delta X)^2$	$(\Delta X \Delta Y)$	$(\Delta X \Delta Z)$	$(C\Delta X)$	$(\Delta Y)^2$	$(\Delta Y \Delta Z)$	$C\Delta Y$	$(\Delta Z)^2$	$(C\Delta Z)$
$A\alpha$	I240	-976	0	0	772	0	0	0	0
$B\alpha$	I384	I520	0	0	I680	0	0	0	0
$C\alpha$	984	-1295	0	-157	I7I0	0	207	0	0
$D\alpha$	I043	9I4	0	-161	805	0	-142	0	0
$A\beta$	I90	242	-340	0	306	-430	0	605	0
$B\beta$	4I3	-376	-498	-41	342	454	37	600	49
$C\beta$	426	324	509	103	247	388	79	610	123
$D\beta$	199	-226	344	-42	256	-390	48	595	-73
	5879	I27	I5	-298	6II8	22	229	24I0	99

Equations normales

$$\left\| \begin{array}{l} 5879\,\Delta X + 127\,\Delta Y + 15\,\Delta Z + 298 = 0 \\ 127\,\Delta X + 6118\,\Delta Y + 22\,\Delta Z + 229 = 0 \\ 15\,\Delta X + 22\,\Delta Y + 2410\,\Delta Z + 99 = 0 \end{array} \right\|$$

ou $1{,}0000\ \Delta X + 0{,}0220\,\Delta Y + 0{,}0025\ \Delta Z - 0{,}506 = 0$

$0{,}0208\ \Delta X + 1{,}0000\,\Delta Y + 0{,}0036\ \Delta Z + 0{,}374 = 0$

$0{,}0062\ \Delta X + 0{,}0087\,\Delta Y + 1{,}0000\ \Delta Z + 0{,}410 = 0$

ΔX	R_1	ΔY	R_2	ΔZ	R_3
1,000	0,518	1,000	1,398	1,000	1,423
	- 0,031	-1,400	-1,400		-0,012
	0,487		-0,002		1,411
	- 0,003		-0,005	-1,400	-1,400
	0,484		-0,007		0,011
-0,500	- 0,500		-0,010		-0,003
	0,016		-0,017		0,008
0,016	0,016				
		0,017	0,017		
				-0,008	-0,008
0,516	0	-0,383	0	0,408	0

		$\Delta X = 0{,}0516$	$\Delta Y = -0{,}0383$	$\Delta Z = -0{,}0408$	v	v^2
$v_{A\alpha}$	=	0,0 + 1,82	+ 1,06		= + 2,88	8,32
$v_{B\alpha}$	=	0,0 - 1,92	+ 1,56		= - 0,36	0,13
$v_{C\alpha}$	=	5,0 - 1,62	-1,58		= + 2,80	7,79
$v_{D\alpha}$	=	-5,0 + 1,67	-1,09		= - 4,24	18,05
$v_{A\beta}$	=	0,0 - 0,71	+ 0,67	-1,00	= - 1,04	1,85
$v_{B\beta}$	=	2,0 - 1,05	- 0,71	-1,00	= - 0,76	0,58
$v_{C\beta}$	=	5,0 + 1,06	- 0,60	-1,01	= + 4,45	19,85
$v_{D\beta}$	=	-3,0 + 0,73	+ 0,61	-1,00	= - 2,66	7,10

$\sum v^2 = 63{,}67$ $\quad \sigma = 2{,}81$ min $\quad p = 1{,}90$ min.

α $\left\| \begin{array}{l} v_A = 3' \\ v_B = 0 \\ v_C = 3' \\ v_D = -4' \end{array} \right.$ $\quad \beta$ $\left\| \begin{array}{l} v_A = -1' \\ v_B = -1' \\ v_C = 4' \\ v_D = -3' \end{array} \right.$

DEUXIEME PARTIE

-:-:-:-:-:-:-

POINT DE VUE QUANTIQUE

CARACTERISTIQUES ET FORMALISME DE LA THEORIE QUANTIQUE

LES DIFFERENCES ENTRE LES LOIS CLASSIQUES ET LES LOIS QUANTIQUES DE LA PHYSIQUE :

Il existe trois différences essentielles entre les lois classiques de physique et les résultats expérimentaux des phénomènes quantiques. La première c'est que la théorie classique prévoit la variation continue des grandeurs physiques, la théorie quantique doit rendre compte en plus des processus discontinus ou indivisibles. La seconde différence c'est que la théorie classique détermine complètement les relations entre les variables à l'instant initial et à l'instant final, c'est-à-dire elle est complètement causale, les lois quantiques déterminent seulement les probabilités des évènements futurs en fonction des conditions données dans le passé.

La troisième différence est dans un système quantifie

seulement certaines valeurs d'une grandeur formant le spectre peuvent être obtenues.

INDIVISIBILITE DES PROCESSUS QUANTIQUES :

Considérons une expérience qui indique le besoin d'introduire un concept de discontinuité ou indivisibilité des processus de la théorie quantique. La première expérience importante, c'est l'effet photoélectrique.

Nous savons que les caractéristiques expérimentales de cet effet ne peuvent pas être expliquées par la théorie classique de l'électromagnétique, l'hypothèse d'une transition discontinue d'énergie dans un saut de largeur $\triangle E = h\nu$ est en accord avec toutes les données expérimentales de cet effet. En plus la même hypothèse est faite par Planck pour expliquer les caractéristiques expérimentales du rayonnement du corps noir. Si le transfert d'énergie était continu il serait nécessaire de considérer les états dans lesquels l'oscillateur de radiation aurait une fraction de quantum, et d'après l'hypothèse de Planck un tel état n'est pas possible.

Il existe beaucoup d'autres expériences qui exigent le transfert discontinu de l'énergie. Nous citons l'expérience de Lawrence et Beam qui ont essayé de briser un quantum de lumière en deux à l'aide d'un déclancheur qui pouvait agir en 10^{-9} secondes. Si l'onde lumineuse était continue comme le

dit la théorie classique, le déclancheur pourrait diviser les quanta en parties plus petites, car un temps plus long que 10^{-9} seconde serait nécessaire pour qu'un quantum puisse traverser. Ils ont trouvé cependant qu'aucun quantum n'était brisé. Si nous combinons l'hypothèse de Planck avec le fait que personne n'est capable de faire une expérience dans laquelle intervient une fraction de quantum, nous sommes conduit à dire qu'un quantum est une unité indivisible de l'énergie. L'insuccès de transfert continu de l'énergie implique que le transfert de quantum d'un système à l'autre est un processus indivisible. L'indivisibilité d'un quantum d'énergie et celle de processus de transfert vont ensemble, ils sont nécessaires l'un pour l'autre pour avoir une théorie self-consistante.

Nous pouvons donc conclure que dans un transfert de quantum, le système ne peut pas être considéré comme passant par des états intermédiaires successifs dans lesquels l'échange d'énergie serait continu.

Bien au contraire les processus quantiques sont considérés comme discontinus et indivisibles. Le transfert de quantum est un évènement de base dans l'univers et ne peut pas être décrit en terme d'autre processus. Il peut être appelé un processus élémentaire comme un proton ou un électron s'appelle une particule élémentaire.

PROBABILITE ET DETERMINISME INCOMPLET DANS LES LOIS QUANTIQUES

L'indivisibilité des processus quantiques est complètement en désaccord avec les lois de la physique classique qui décrivent tous les processus d'une manière continue. Puisque les lois classiques présupposent l'existence des processus continus, il est clair que le saut quantique discontinu ne peut pas être prédit par ces lois. Notre problème est donc de trouver les nouvelles lois décrivant les transferts quantiques.

Nous venons maintenant sur le deuxième point important qui sépare la théorie classique de la théorie quantique. C'est un fait expérimental qu'aucune loi n'est découverte qui prédit exactement où et quand un quantum individuel serait transféré, seulement la probabilité d'un tel processus peut être prédite. Par exemple si un seul quantum tombe sur une surface métallique, il est impossible de prédire s'il sera absorbé, et s'il est absorbé, où et quand, d'une façon exacte. Mais si un faisceau contenant plusieurs quanta arrive sur cette surface, il est possible à partir de l'intensité de la lumière employée de prédire le nombre moyen absorbé dans qhaque région de la surface. Dans ce cas les lois quantiques apparaissent comme donnant seulement la probabilité d'un évènement.

Nous verrons que ce comportement n'appartient pas seulement à l'effet photoélectrique, mais il existe dans tous

les processus quantiques. Nous pouvons donc voir que les lois quantiques sont très différentes de celles de la physique classique qui déterminent toujours le comportement du système à l'aide des lois causales. Par exemple, tous les points matériels obéissent à l'équation de Newton $F = m\gamma$.

Les positions initiales et la vitesse de chaque particule étant données, le mouvement futur est exactement déterminé par l'équation différentielle de mouvement, sous réserve que la force F satisfasse à certaines conditions analytiques. La trajectoire d'un point matériel est déterminée par l'ensemble des positions au cours du temps. Dans un mouvement trois ordres de quantité sont considérés :

1) la position au cours du temps,

2) la vitesse au cours du temps,

3) la valeur de la force au cours du temps.

Pour une particule chargée, la force F est déterminée par les champs électriques et magnétiques. Mais ils peuvent être calculés exactement à l'aide des équations de Maxwell et des valeurs initiales des champs électriques et magnétiques. D'où d'après la physique classique le mouvement d'une particule chargée (ou d'une autre sorte de particule) peut être déterminé avec précision au cours du temps si les conditions initiales sont connues. La théorie s'appelle donc complètement déterministe. Employant ces idées générales on conclut à partir de la théorie classique que dans l'effet

photoélectrique les électrons gagnent de l'énergie d'une façon continue qui est calculable à partir de l'intensité de la lumière employée et des conditions initiales pour les électrons. D'autre part, les expériences montrent que le processus de transfert de l'énergie est discontinue et n'est pas régi apparemment par les lois déterministes, du moins par les lois déterministes de la mécanique classique. Par contre nous pouvons seulement déterminer la probabilité du processus. A ce point il importe de donner une connection entre l'existence de la probabilité et l'indivisibilité des processus quantiques. D'abord il y a des faits déjà mentionnés, c'est-à-dire beaucoup de lois classiques (les équations de Newton incluses) qui sont essentielles pour l'opération du déterminisme classique et qui supposent des processus continus. D'où si ces sortes de lois ne sont pas valables dans les processus discontinus, elles ne peuvent pas être appliquées directement aux transferts quantiques. Une certaine loi classique de conservation cependant ne nous oblige pas de suivre les particules le long d'une trajectoire continue dans l'espace-temps c'est la loi de choc.

Même dans une collision dans laquelle nous ne pouvons pas suivre le mouvement d'une façon continue, ces lois s'appliquent. Les lois de conservation sont valables même dans les processus discontinus. C'est un fait expérimental que ces lois peuvent être transférées à la théorie quantique. Par exem-

ple il a été démontré expérimentalement que l'énergie est toujours conservée dans l'effet photoélectrique. Beaucoup d'autres expériences confirment aussi ces résultats. Toutes les lois déterministes classiques ne doivent donc pas être abandonnées.

L'INVRAISEMBLANCE DES LOIS COMPLETEMENT DETERMINISTES :

On se demande si l'existence de la probabilité dans les processus quantiques n'est pas le résultat de notre ignorance des variables exactes décrivant le système.

Dans la physique classique les probabilités apparaissent souvent pour cette raison, exemple en thermodynamique, nous mesurons la pression, la température et le volume d'un système donné. Dans une région très petite de l'espace, près du point critique essentiellement, nous trouvons que ces quantités n'obéissent plus exactement à une équation de l'état. D'où les lois déterministes de la thermodynamique sont violées et remplacées par des lois probabilistes. C'est pourquoi les variables thermodynamiques ne sont plus appropriées pour le problème et doivent être remplacées par la position et la vitesse de chaque molécule qui sont au point de vue thermodynamique les variables cachées. Les quantités thermodynamiques sont alors seulement les moyennes des variables cachées et qui ne peuvent pas être observées seulement par les méthodes thermodynamiques. Afin de trouver des lois cau-

sales, nous devons accepter une description en terme de molécules individuelles.

La première idée c'est que la probabilité dans les processus quantiques apparait de la même façon. Peut-être il existe des variables cachées qui contrôlent réellement le temps et la position exacte de transfert d'un quantum, et nous ne les avons pas encore trouvées.

Quoique cette éventualité ne peut pas être exclue, nous pouvons montrer qu'elle est invraisemblable. Le premier point est évidemment qu'il n'existe aucune preuve expérimentale d'existence de ces variables cachées. Le second point est qu'il existe des arguments théoriques forts qui rendent invraisemblables l'existence de ces variables.

LE PRINCIPE D'INCERTITUDE :

C'est une expression très importante qui nous indique la limitation de la possibilité de donner une description déterministe du monde, elle a été donnée pour la première fois par Heisenberg et s'appelle principe d'incertitude de Heisenberg. Nous allons donner un énoncé de ce principe. Si la mesure de position était effectuée avec la précision Δx et celle de la composante x de la quantité de mouvement effectuée simultanément avec la précision Δp, on a :

$$\Delta p \Delta x \geqslant (\sim \hbar)$$

Puisque dans la théorie classique la connaissance de la quantité de mouvement et celle de la position de chaque parti-

cule est nécessaire pour pouvoir déterminer la trajectoire à partir des équations de mouvements, il est clair que ce principe implique, qu'une trajectoire ne peut pas être connue Mais, c'est une autre question de savoir si on peut ou non étendre les équations de la mécanique classique au cas quantique.

On a une relation similaire entre la précision ΔE de la mesure de l'énergie et de temps Δt nécessaire pour effectuer cette mesure : $\Delta E \Delta t \geqslant (\sim \hbar)$

Plus généralement si Δq est l'erreur de la mesure d'une certaine coordonnée et Δp l'erreur de son moment conjugué canonique on a : $\Delta p \Delta q \geqslant (\sim \hbar)$

L'INTERPRETATION DU PRINCIPE D'INCERTITUDE :

On se pose la question importante suivante : Pouvons nous nous imaginer un électron comme une particule ayant une position et une quantité de mouvement simultanément bien définies, mesurées avec la précision complète ? Ou devons nous nier le déterminisme complet de la structure de la matière elle-même ? L'idée qu'une particule ait une position et une quantité de mouvement simultanément bien définie et incertaine pour nous, est équivalente à l'hypothèse des variables cachées qui déterminent en réalité ces quantités d'une façon que nous ne pouvons pas prédire ou contrôler

avec une précision complète. On démontre que l'hypothèse des variables cachées est inconsistante avec la théorie quantique si toutes les variables cachées appartiennent au système. Par contre la consistance a lieu si une partie des variables cachées appartiennent au système et d'autres à l'appareil de mesure et si certaines de ces variables cachées sont inaccessibles à la mesure (essentiellement non mesurables ou encore "métaphysiques").

MODIFICATION DES MESURES PAR LES EFFETS QUANTIQUES :

Pour pouvoir effectuer une mesure sur le système S, il faut qu'il entre en interaction avec l'appareil A de mesure. Cette interaction devrait être traitée par la théorie quantique, dans laquelle le déterminisme est limité par le transfert d'un quantum qui est incontrôlable. D'où si nous voulons faire une observation exacte au niveau quantique, un élément de déterminisme incomplet intervient entre l'interaction de l'appareil et le système. Ce comportement est totalement différent de ce que prédit la mécanique classique qui affirme que la perturbation résultante de l'appareil de mesure peut être rendue arbitrairement petite, et corrigée à l'aide des lois déterministes classiques si elle n'est pas négligeable.

Nous devons donc étudier les différents appareils employés pour la mesure de position et la quantité de mouvement. Le résultat obtenu par ces appareils sont interprétés norma-

lement à l'aide de la mécanique classique, mais maintenant nous voulons étudier d'autres limitations imposées par la nature quantique du système. Nous nous limitons à montrer dans les cas particuliers, comment les effets quantiques imposent la limitation de précision.

MICROSCOPE :

On peut mesurer la position d'un électron en utilisant un microscope. Afin de minimiser l'effet de la pression de la radiation sur électron, supposons que la lumière soit si faible que l'électron diffuse seulement un quantum de lumière. Après la diffusion, le quantum de lumière passe à travers des systèmes optiques du microscope et tombe par exemple sur une plaque photographique. De la position de ce spot nous essayons de déduire la position de l'électron. Nous devons employer la théorie ondulatoire de la lumière. La diffraction nous dit qu'il existe une région $\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \phi}$ de laquelle la lumière est diffusée. L'électron se trouve donc quelque part dans cette région. Pour minimiser l'incertitude, nous devons prendre λ petit, mais qu'est-ce qu'il arrive à la quantité de mouvement de l'électron ? Nous savons que le quantum de la lumière a une quantité de mouvement $p = h/\lambda$ Si le quantum est diffusé dans un angle ψ, il communique à l'électron une quantité de mouvement $\Delta p = p \sin \psi = \frac{h}{\lambda} \sin \psi$. On ne peut pas déterminer l'angle ψ ; il doit

être compris dans l'ouverture ϕ de la lentille. Nous obtenons $\Delta p = \frac{h}{\lambda \sin \phi} = \frac{h}{\Delta X}$. Ceci est en accord avec le principe d'incertitude. La raison de l'incertitude n'est pas dans l'emploi d'un seul quantum, mais c'est parce que la grandeur du transfert de quantité de mouvement est incontrôlable et nous ne pouvons pas la corriger. On peut essayer de réduire l'incertitude Δp en diminuant l'ouverture ϕ, cela implique une décroissance du pouvoir de résolution de la lentille, car les effets de diffraction augmentent, d'où l'augmentation de Δx.

Plus généralement, nous disons que la limitation d'exactitude de mesure correspondant au principe d'incertitude, intervient dans l'expérience. Cette limitation correspond au fait que la structure fondamentale de la matière est très différente de celle supposée par la théorie classique.

INFLUENCE DE LA DUALITE ONDE-CORPUSCULE DE LA MATIERE SUR LA MESURE

Pour déterminer une position nous divisons l'espace en intervalles de largeur Δx. Nous pouvons considérer par exemple que c'est un fil métallique dont chaque portion Δx absorbe une fraction négligeable de l'onde incidente. Nous obtenons dans ce cas le problème d'un nombre infini de fentes. La fonction d'onde du $n^{ème}$ plan de la fente est notée par $\psi_n^{\circ}(x_s)$. Elle est une fonction nulle en dehors de

la $n^{ème}$ fente, mais à l'intérieur de cette fente elle est égale à $\psi(x_s)$, la vraie valeur de la fonction d'onde dans le plan. La fonction d'onde $\psi_n^0(x_s)$ représente donc un état dans lequel l'électron va certainement à travers la $n^{ème}$ fente. D'après le principe de Huyghens la fonction d'onde complète à droite du système de fentes est :

$$\psi(x) = \int \frac{\exp[2\pi i (x-x_s)/\lambda]}{|x-x_s|} \left[\psi_1^0(x_s) + \psi_2^0(x_s) + \psi_3^0(x_s) + \cdots\right] dx_s$$

ou la formule plus compacte suivante :

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) + \cdots\cdots$$

Où $\psi_n(x)$ représente la partie de la fonction d'onde qui est arrivée de la $n^{ème}$ fente au point x. ψ est la fonction d'onde pour un système non-perturbé par la mesure. Si cependant on effectue une mesure de position qui montre exactement à travers quelle fente l'électron passe, la fonction d'onde change et devient :

$$\psi(x) = \psi_1(x)^{i\alpha_1} + \psi_2(x)^{i\alpha_2} + \psi_3(x)^{i\alpha_3} + \cdots\cdots$$

Ou les α_j sont des constantes différentes de phases et sont non contrôlables. Notons par $P_n(x) = \psi_n^*(x)\,\psi_n(x)$ la probabilité de distribution si la $n^{ème}$ fente est ouverte seulement, nous obtenons alors pour la probabilité totale d'arrivée d'une particule :

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = \sum_n P_n(x) + \sum_{n \neq m} \left(e^{i(\alpha_n - \alpha_m)} \psi_m^* \psi_n + e^{i(\alpha_m - \alpha_n)} \psi_n^* \psi_m \right)$$

Puisque α_n et α_m sont des phases réparties au ha-

sard, les termes d'interférence (ou $n \neq m$) s'anihilent dans une série d'expériences. La fonction de probabilité se réduit donc à une série non interférante des paquets, et peut être traitée comme une fonction de probabilité classique. Cela signifie qu'après l'interaction électron-appareil toutes les probabilités peuvent être calculées ou bien à l'aide de fonction d'onde :

$$P(k) = \sum_n |\varphi_n(k)|^2 + \sum_{n \neq m} \varphi_n^* \varphi_m e^{i(\alpha_m - \alpha_n)} + \varphi_m^* \varphi_n e^{i(\alpha_n - \alpha_m)}$$

Ou par une procédure équivalente qui est de supposer que la fonction d'onde est entièrement : $\psi_1 e^{i\alpha_1}, \psi_2 e^{i\alpha_2}, \psi_3 e^{i\alpha_3}, \ldots\ldots$ avec les probabilités respectives : p_1, p_2, p_3, ... etc.

Alors l'électron agit comme une onde, passée par une fente inconnue de largeur Δx. Pour trouver la fente traversée effectivement, par l'électron, nous devons consulter l'appareil de mesure. En plus à partir de l'état du système avant la mesure, nous pouvons seulement prédire la probabilité de trouver une valeur particulière de la position. Puisque l'aspect ondulatoire de l'électron résulte de son effet d'interférence dans une région de l'espace, nous voyons que la destruction des relations définies entre les phases par la mesure de position, détruit aussi la possibilité de son comportement ondulatoire dans une région plus grande que Δx, où Δx est la précision de la mesure. Par contre l'électron agit plus fortement comme une particule qui existe dans une région de largeur Δx. Les expériences qui com-

prennent des distances plus petites que Δx, seraient cependant capable de montrer les effets d'interférence et de bien justifier l'interprétation ondulatoire. Nous résumons ces résultats en énonçant que, quand un électron interagit avec un appareil qui mesure sa position, l'aspect ondulatoire de l'électron est dominé par l'aspect corpusculaire, quoique l'électron n'est jamais complètement identique à une particule ou à une onde.

LA DISTRIBUTION DE PROBABILITE EN MECANIQUE QUANTIQUE :

Définissons deux probabilités de la façon suivante :

1) $p(x)dx$, la probabilité pour que la particule se trouve entre le point x et $(x + dx)$.

2) $p(k)dk$, la probabilité pour que la particule ait une quantité de mouvement entre $\hbar k$ et $\hbar (k + dk)$.

On peut définir des fonctions de probabilités dans la théorie non relativiste du moins, satisfaisant les propriétés mentionnées d'une façon consistante. Cette manière de définition se heurte cependant à des difficultés sérieuses dans une théorie relativiste. D'autre part, pour la lumière, la définition $p(k)$ est possible tandis que celle de $p(x)$ ne l'est pas. Cela veut dire que le quantum de lumière n'a pas les propriétés spatiales des particules. Discutons maintenant la possibilité de choix en fonction de probabilité $p(x)$.

Nous commençons par la définition de cette fonction qui exige au moins les propriétés suivantes :

a) Elle doit être définie positive

b) La probabilité est plus grande où $|\psi|$ est grande, la probabilité est petite où $|\psi|$ est petite.

c) Elle ne doit pas dépendre dans une théorie non relativiste, par exemple du zéro d'énergie, puisque nous savons qu'aucune grandeur physique observable ne dépend de ce choix. Dans une théorie relativiste la probabilité totale doit être conservée lorsqu'on passe d'un référentiel de Lorentz à l'autre.

d) Puisque la particule se trouve quelque part dans l'espace, la probabilité totale (intégrée sur tout l'espace) doit être égale à l'unité, quel que soit le temps.

Choisissons donc la fonction suivante pour p(x), $p(x) = \psi\psi^*$. Cette fonction satisfait évidemment aux propriétés (a) et (b). La propriété (c) est satisfaite également en notant que l'addition d'une constante arbitraire E_0 à l'énergie change la fréquence d'oscillation de ψ et laisse inchangé p(x), en fait on a :

$$\psi(\vec{x},t) = e^{i(\vec{k}\vec{x} - \frac{Et}{\hbar})}$$

Ajoutons maintenant la constante E_0 à l'énergie E, nous obtenons :

$$\psi'(\vec{x},t) = e^{i[\vec{k}\vec{x} - \frac{(E-E_0)t}{\hbar}]} = \psi e^{\frac{iE_0t}{\hbar}}$$

d'où : $p'(x) = \psi'^*\psi' = \psi^*\psi = p(x)$

On peut vérifier également que notre choix de p(x) est compatible avec la propriété (d).

En mécanique quantique toutes nos connaissances de comportement d'une particule sont contenues dans la fonction d'onde ψ de cette particule. Dans la théorie non relativiste l'équation de Schrödinger nous indique l'évolution de cette fonction au cours du temps, la connaissance complète de ψ cependant nous informe en termes de probabilités ; contrairement à la théorie classique nous sommes en face d'une situation qui n'est pas complètement déterministe.

Le résultat d'un nombre répété d'expériences sur une même particule ou sur un faisceau de particules identiques s'interprète à l'aide de cette fonction de probabilité. Dans ce cas là, nous pouvons donner une interprétation statistique à la nouvelle théorie.

PROBABILITES DES RESULTATS DE MESURE DE POSITION ET D'IMPULSION D'UNE PARTICULE

L'état dynamique d'une particule classique est défini à chaque instant par la donnée précise de sa position X (x,y,z) et de son impulsion $p(p_x, p_y, p_z)$.

Comme par contre, la fonction d'onde $\psi(X)$ a une certaine extension spatiale, on ne peut pas attribuer à une particule quantique une position précise mais seulement définir la probabilité de trouver la particule localisée dans une

certaine région de l'espace lorsqu'on effectue une mesure de position. De la même façon, on ne peut attribuer en général à une particule quantique une impulsion précise. On peut seulement définir la probabilité de trouver l'impulsion dans une certaine région de l'espace des impulsions lorsqu'on effectue une mesure d'impulsion.

La particule associée à l'onde ne possède en général ni position précise, ni impulsion précise ; si l'on effectue la mesure de l'une ou de l'autre de ces variables dynamiques sur un système individuel représenté par ψ ; on ne peut faire aucune prédiction sur le résultat.

Les prédictions envisagées s'appliquent à un très grand nombre N de systèmes équivalents, indépendants les uns des autres et représentés chacun par la même fonction d'onde ; si l'on effectue sur chacun d'eux une mesure de position (ou impulsion), P(X) donne la distribution des N résultats de mesure à la limite ou le nombre N des nombres de cet ensemble statistique tend vers l'infini.

PERTURBATION INCONTROLABLE LORS DE L'OPERATION DE MESURE

Les écarts Δx, Δp, qui interviennent dans les relations d'incertitude position-impulsion se réfèrent à des mesures effectuées dans les conditions de la définition des probabilités... Ils ne doivent pas être confondus avec les erreurs de mesures ordinaires dûes à ce que l'instrument de

mesure n'est jamais parfait et ne permet pas de déterminer les quantités mesurées avec une précision infinie.

Examinons donc, comment se présente l'opération de mesure lorsqu'on admet l'interprétation statistique. Considérons par exemple, la mesure de la coordonnée de position d'une particule d'un système quantique dont l'état dynamique est représenté par la fonction d'onde ψ .

Nous admettons que l'appareil de mesure dont nous disposons est infiniment précis. L'impossibilité de prédire exactement la réponse de cet appareil ne vient pas d'une imperfection de ce dernier, mais la fonction ψ ne correspond pas en général à une valeur précise de x, c'est une superposition d'états dynamiques correspondant chacun à une valeur précise de x. Immédiatement après l'opération de mesure nous pouvons affirmer que le système se trouve dans un état dynamique, où la coordonnée x a la valeur précise x' indiquée par l'appareil de mesure. Un tel état ne peut pas être représenté par la fonction d'onde ψ . L'intervention de l'appareil de mesure a modifié l'état dynamique du système mesuré. En plus, cette perturbation du système lors de l'opération de mesure est jusqu'à un certain point incontrôlable.

On ne peut pas prédire exactement quel sera l'état du système après l'opération de mesure, mais seulement la probabilité qu'il se trouve dans un état dynamique correspondant à telle ou telle valeur x' de la coordonnée x.

A l'échelle des phénomènes macroscopiques, on peut toujours faire en sorte que cette action perturbatrice de l'appareil de mesure sur le système soit négligeable ou tout au moins connue avec une bonne précision. Mais en réalité, l'action de l'instrument de mesure sur l'objet ne peut pas être réduite indéfiniment car leur interaction mutuelle se fait par quanta discrets. A l'échelle de précision des phénomènes microscopiques, les principes de la théorie quantique ont en revanche pour conséquence que la perturbation imprévisible et incontrôlable subie par le système physique lors d'une mesure est toujours suffisamment forte pour que les relations d'incertitude de Heisenberg ne cessent jamais d'être vérifiées.

Ainsi dans la mesure de x envisagée plus haut, le système est passé de la fonction ψ à la fonction ψ'. Comme cela a déjà dit, ψ ne correspond en général ni à une valeur précise de x, ni à une valeur précise de p, mais à une distribution de probabilité P(x) de trouver telle ou telle valeur de x dans l'éventualité où une mesure précise de cette quantité est entreprise et à une distribution de probabilité P(p) de trouver telle ou telle valeur de p dans l'éventualité d'une mesure précise de p.

A la nouvelle fonction ψ' correspond de nouvelles distributions P'(x) et P'(p) ; en particulier les écarts $\Delta' x$, $\Delta' p$ relatifs à ces distributions satisfont nécessairement à la relation $\Delta' x . \Delta' p \geqslant (\sim \hbar)$

Si en particulier la mesure de x est infiniment précise ($\Delta' x = 0$), la quantité $\Delta' p$ doit être infinie. On ne peut pas diminuer l'incertitude sur la variable de position x sans augmenter d'au moins autant l'incertitude sur la variable d'impulsion p.

LES CORRELATIONS ET LES FLUCTUATIONS STATISTISTIQUES

Dans un processus de mesure, la valeur observée d'une variable fluctue en général d'une mesure à l'autre. Il est utile d'avoir une idée de cette fluctuation.

Dans la théorie classique ces fluctuations sont souvent mesurées en terme de valeur quadratique moyenne de déviation, c'est-à-dire la fluctuation moyenne $\langle F \rangle$ d'une grandeur x est donnée par :

$$\langle F \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Il est clair que s'il n'y a aucune fluctuation, c'est-à-dire si $x = \langle x \rangle$ dans toutes les mesures, on a alors, $\langle F \rangle = 0$. Puisque $(x - \langle x \rangle)^2$ est nécessairement défini positif dans le cas où $x \neq \langle x \rangle$ on a $\langle F \rangle \neq 0$. Plus $x - \langle x \rangle$ est grand, plus $\langle F \rangle$ est grand.

Il est a remarquer que la connaissance de $\langle F \rangle$ et de $\langle x \rangle$ ne peut pas déterminer la fonction de probabilité P(x), où P(x)dx donne la probabilité pour avoir la valeur entre x et (x + dx).

Elle peut simplement définir la distribution de x autour

de $\langle x \rangle$. En effet on peut dire que $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ nous donne une mesure de l'incertitude sur x.

Nous pouvons donc écrire $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = (\Delta x)^2$, où Δx est l'incertitude sur x.

Dans la théorie quantique, en désignant la position d'une particule par x on a, $P(x) = \psi^*(x) \cdot \psi(x)$ où $\psi(x)$ est la fonction d'onde de la particule, nous avons donc :

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, (x - \langle x \rangle)^2\, \psi(x)\, dx = (\Delta x)^2$$

Il est possible d'avoir certain renseignement sur la grandeur de $(x - \langle x \rangle)^2$ même si on ne connait pas la forme précise de ψ et c'est là l'avantage de l'introduction de $\langle F \rangle$.

On peut se poser la question suivante : Existe-t-il un système dans un état quantique de façon que certaine variable dynamique attachée à ce système ait une valeur bien déterminée sans fluctuation ?

Pour répondre à cette question, prenons une variable O ayant une valeur bien déterminée dans toutes les observations c'est-à-dire,

$$\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2 = \int \psi\, (O^2 - \langle O \rangle^2)\, \psi\, dv = 0$$

Une possibilité de satisfaire cette relation est de choisir ψ telle que $O\psi_c = C\psi_c$ où C est une constante appelée la valeur propre ou la valeur caractéristique de l'opérateur O et ψ_c est appelée la fonction propre ou la fonction caractéristique correspondante à la valeur propre C.

Nous trouvons également $\langle O \rangle = C$. Plus généralement

$$\langle O^n \rangle = C^n$$

On peut facilement démontrer que si ψ n'est pas une fonction propre de l'opérateur O, la valeur de cet opérateur subit une certaine fluctuation, c'est-à-dire, sera déterminée dans un intervalle avec un écart type non nul.

DEVELOPPEMENT DU FORMALISME DE BASE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

L'espace des fonctions d'onde est un espace des fonctions de carré sommable (espace de Hilbert, $\mathcal{H}$). On a les propriétés suivantes :

1 - Linéarité, c'est à dire si ψ_1 et ψ_2 sont des éléments de $\mathcal{H}$ nous avons $\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \in \mathcal{H}$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes.

2 - Produits scalaire,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0 \rightarrow \text{orthogonalité}$$

La norme de $\|\psi\| = N = \langle \psi, \psi \rangle$ avec $N \geqslant 0$

$N = 0$ implique $\psi = 0$

Il est évident que : $\langle \psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle^*$

$$\langle \varphi, \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \varphi, \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \varphi, \psi_2 \rangle$$

3 - Inégalité de Schwartz :

$$\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \geqslant |\langle u, v \rangle|^2$$

L'égalité est satisfaite si $v = \lambda u$

DEFINITION GENERALE DES OPERATEURS - LES VALEURS MOYENNES DES OPERATEURS :

Postulat 1 - A tout variable dynamique

$$\mathcal{A} = A\ (x_1\ x_2\ \ldots\ldots\ x_n,\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \ldots\ldots\ \vec{p}_n)$$

on associe un opérateur A $(x_1\ x_2 \ldots\ x_n, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_1 \ldots\ldots\ldots \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_n)$ où les x_i sont les coordonnées cartésiennes et les $\vec{p}_i$ les quantités de mouvements et $\vec{\nabla}_j$ est l'opérateur de dérivation sur les variables x_j.

Postulat 2 - Quand le système est dans l'état , la valeur moyenne de A est donnée par

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi, A\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}$$

si $\langle \psi, \psi \rangle$ est normalisé, on a $\langle \psi, \psi \rangle = 1$

Définition d'un opérateur hermétique : Soit deux fonctions d'ondes notées $\psi(\vec{r})$ et $\varphi(\vec{r})$ représentant deux états physiques ; nous savons que leur produit scalaire est défini par : $(\psi, \varphi) = \int \psi^*(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})\, d\vec{r}$

L'élément de matrice d'un opérateur A entre ces deux états s'écrit : $(\psi, A\varphi)$. On dit que l'opérateur est hermétique si la relation suivante est satisfaite :

$$(\psi, A\varphi) = (A\psi, \varphi)$$

Corollaire 1 - Si A est hermétique, la valeur moyenne de A est réelle et réciproquement.

Remarquons que la valeur moyenne d'une grandeur physique doit être réelle, d'où à une grandeur physique est associé un opérateur hermitique.

Corollaire 2 - Si on a $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = 0$, la fonction d'onde du système est telle que on a $A\psi = a\psi$

a étant une constante.

Donc pour pouvoir effectuer une mesure précise, la fonction ψ doit être une fonction propre de l'opérateur A dont on mesure la valeur. On trouve également dans cette condition $\langle A^n \rangle = \langle A \rangle^n$

SIGNIFICATION PHYSIQUE :

Les fluctuations sont nulles et on a $\langle A \rangle = a$, l'opérateur aura une valeur bien déterminée a, l'état du système est tel que ψ est fonction propre de A.

Postulat 3 - Les seuls résultats possibles d'une mesure de la variable dynamique A sont l'une quelconque des valeurs propres a, où A obéit à l'équation aux valeurs propres $A \psi_a = a \psi_a$, en effet, du postulat 2 on peut le tirer, mais le postulat 3 dit en plus que les a sont seuls possibles.

LES OBSERVABLES QUI COMMUTENT ET LES VARIABLES COMPATIBLES

Théorème : Si deux observables commutent, elles possèdent un système orthonormal complet de fonctions propres communes et réciproquement. Limitons nous au cas des spectres discontinus.

DEMONSTRATION DIRECTE : supposons que les observables A et B commutent.

$$[A, B] = 0 \quad \text{c'est à dire } AB - BA = 0$$

soit ψ_a une fonction propre de A, a étant sa valeur propre. Développons ψ_a suivant un système orthonormal complet de fonctions propres de B :

$$\psi_a = \sum_m C_m(a)\, \varphi(a, b_m)$$

où $\varphi(a, b_m)$ est une fonction propre de B correspondant à la valeur propre b_m. On démontre qu'on peut toujours s'arranger pour que chaque fonction de base figurant dans cette somme corresponde à une valeur propre b_m différente, mais alors la fonction $\varphi(a, b_m)$ peut dépendre du choix de ψ_a, c'est pourquoi a figure comme argument dans φ

Montrons que : $\hat{\varphi}_m \equiv (A - a)\, \varphi(a, b_m) = 0$

puisque A et B commutent on a :

$$B\, \hat{\varphi}_m = (A - a)B\, \varphi(a, b_m) = (A-a)b_m\, \varphi(a, b_m) = b_m \hat{\varphi}_m$$

Les fonctions $\hat{\varphi}_m$ sont donc fonctions propres de B. Les valeurs propres correspondantes étant toutes distinctes, Ceci entraîne que ces fonctions sont linéairement indépendantes. On a cependant :

$$\sum_m C_m(a)\, \hat{\varphi}_m = \sum_m C_m(a)(A-a)\, \varphi(a, b_m) = \sum_m (A-a)\, C_m(a)\, \varphi(a, b_m) = \sum_m (A-a)\, \psi_a = 0$$

Ceci n'est possible que si chacun des produits $C_m(a)\, \hat{\varphi}_m$ est nul, puisqu'elles sont linéairement indépendantes comme fonctions propres pour des valeurs propres b_m toutes différentes les unes des autres.

Alors ou bien $C_m(a)$ est nul ou bien $\hat{\varphi}_m$ est nul. Alors ou bien $\varphi(a, b_m)$ est orthogonal à ψ_a ou bien $\varphi(a, b_m)$ est fonction propre de A et de B.

Considérons alors, un système orthonormal complet $\{\psi_n^{(r)}\}$ de fonctions propres de A : $A\psi_n^{(r)} = a_n \psi_n^{(r)}$

d'après ce qui vient d'être démontré ces fonctions se mettent sous la forme : $\psi_n^{(r)} = \sum_m C_{nm} \varphi^{(r)}(a_n, b_m)$

les $\varphi^{(r)}(a_n, b_m)$ sont des fonctions propres communes à A et B, ou des fonctions orthognoales à $\psi_n^{(r)}$ à A et B . Pour n fixé il y a au moins un coefficient c_{nm} non nul, dont au moins une fonction propre commune . L'ensemble de fonctions $\varphi^{(r)}(a_n, b_m)$ qui correspondent à un même couple de valeurs propres (a_n, b_m) peuvent ne pas être linéairement indépendantes, mais il est toujours possible de faire choix d'une suite de fonctions orthonormales $\chi^{(s)}(a_n, b_m)$ correspondant au même couple de valeurs propres tel que :

$$\varphi^{(r)}(a_n, b_m) = \sum_s C_{rs} \chi^{(s)}(a_n, b_m)$$

pour chaque a_n il y a au moins un b_m donnant un $\chi(a_n, b_m)$ pour chaque b_m il y a au moins un a_n donnant un $\chi(a_n, b_m)$ mais pour a_n, b_m choisis arbitrairement il n'y a pas toujours un χ.

L'ensemble $\{\chi\}$ ainsi formé constitue un système orthonormal de fonctions propres communes à A et B. En outre c'est un système complet car toute fonction d'onde Ψ est développable en série de χ car Ψ est développable sur la base des ψ_a et chaque ψ_a est développable sur la base des $\chi(a_n, b_m)$.

LE RECIPROQUE :

Si A et B possèdent un système orthonormal complet de fonctions propres communes $\chi^{(s)}(a_n, b_m)$ on a

$$AB\,\chi^{(s)}(a_n, b_m) = a_n b_m\ \chi^{(s)}(a_n, b_m) = BA\,\chi^{(s)}$$

donc $[A, B]\ \chi^{(s)}(a_n, b_m) = 0$

L'application de $[A, B]$ sur toutes les fonctions donne zéro d'ou $[A, B] = 0$

Si $\psi = \sum_{mn} C_{mn}\chi(a_n, b_m)$

$$[A,B]\psi = [A,B]\sum_{mn} C_{mn}\chi(a_n, b_m) = \sum_{mn} C_{mn}[A,B]\chi(a_n, b_m) = 0$$

sous réserve des convergences.

Le sens physique de tout ce qui vient d'être dit est le suivant. Si un système physique est dans un état ψ dans le temps t, une mesure précise des variables A et B nous donne avec certitude les résultats a et b, autrement dit, la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir effectuer une mesure précise de façon qu'on trouve les valeurs bien déterminées, simultanément pour deux ou plusieurs variables est que ces variables commutent entre elles.

Nous savons que la composante p_x de la quantité de mouvement d'une particule ne commute pas avec la position x de cette même particule, on a en effet $[p_x, x] = \hbar/i$, d'après le théorème ci-dessus une mesure simultanée de ces deux variables ne peut pas nous fournir des valeurs exactes pour ces variables, cela est en accord avec le principe d'incertitude de Heisenberg qui dit : $\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar$

D'autre part nous remarquons que la possibilité ou l'impossibilité d'une mesure simultanée de deux ou plusieurs variables dynamiques est indépendante du résultat de mesure de ces variables et ne dépend que des variables elles-mêmes.

PROBLEME DES PREVISIONS :

1 - Prévision certaine : La physique théorique doit être capable de prévoir en principe, le résultat d'une mesure qui serait effectuée ultérieurement, à partir d'une certaine mesure initiale, autrement dit en connaissant quelques indications dites "les conditions initiales" on doit pouvoir prédire à l'aide des équations de mouvement, l'évolution du système au cours du temps. Soit un observateur Ob ayant mesuré au temps t une grandeur physique G d'un système S. On dit à partir de cette mesure, il peut faire une prévision certaine pour une grandeur G' correspondant à un temps ultérieur t', s'il peut calculer le résultat de mesure qu'on obtiendrait pour G' en utilisant le résultat obtenu de la mesure G ; aucune mesure n'étant effectuée sur G dans l'intervalle (t, t'). La théorie est déterministe s'il existe à chaque instant t une grandeur G telle que la mesure de cette grandeur au temps t permet de prévoir d'une façon certaine des valeurs postérieures à t pour toute grandeur.

2 - Prévision incertaine : Nous savons qu'en théorie quantique le déterminisme apparent n'existe pas, d'où la

considération de prévision certaine doit être élargie. Soit un observateur Ob mesurant à un instant t une grandeur A d'un système physique S, nous dirons qu'il peut faire une prévision pour un ensemble de résultats possibles pour une grandeur B à un instant t' supérieur à t en utilisant le résultat de mesure sur A au temps t, s'il peut à partir de résultat de mesure de A déterminer un sous-ensemble S_B de l'ensemble F_B des résultats possibles pour B tel que le résultat obtenu par une mesure sur B soit contenu dans cet sous-ensemble, aucune mesure n'étant effectuée dans l'intervalle (t,t')

Une telle prévision est évidemment très imprécise. Si on accepte que le sous-ensemble S_B peut coïncider avec l'ensemble F_B lui-même on peut dire qu'on a fait une prévision pour un ensemble de tous les résultats possibles. De telles prévisions sont très vagues. Pour obtenir des indications plus précises nous acceptons de tenir compte de la chance plus ou moins grande d'avoir un résultat r_B si nous effectuons une mesure. Nous remarquons enfin, que cette notion de chance étant subjective, ne peut pas être vérifiée directement.

OPERATEUR D'EVOLUTION

Soit la valeur G(t) d'une grandeur autoprévisible G évoluant au cours du temps, nous aurons évidemment pour cette variable au temps $t \neq t'$ la valeur G(t'). Soit un opérateur

O(t, t') responsable du passage de G(t) à G(t'), on aura donc la relation suivante :

$$G(t') = O\ (t,t')\ G(t)$$

Nous imposons la condition initiale suivante : O(t,t)=1 c'est-à-dire, au temps initial t, aucun changement n'intervient, autrement dit, nous prenons le temps t comme origine et supposons que c'est à partir de ce temps initial que le système se met à évoluer par une interaction quelconque ou spontanément.

L'opérateur O plus la condition initiale nous donne la valeur de G au cours du temps, c'est pourquoi l'opérateur O est appelé l'opérateur d'évolution pour la grandeur G, grâce à cet opérateur nous pouvons nous rendre compte de l'évolution de la grandeur G au cours du temps. Si G est grandeur d'état, alors la valeur de G fixe la valeur de toute grandeur. Dans ce cas l'opérateur O(t,t') fixe l'évolution du système. On appelle alors opérateur d'évolution du système.

OBJECTIVITE ET SUBJECTIVITE ET LA DISTINCTION ENTRE ELLES

On dit qu'il y a objectivité totale s'il existe un certain résultat de mesure déterminé objectivement mais inconnu. Nous avons dit que l'on peut prévoir que les résultats de mesure sur une grandeur B appartiennent à un ensemble F_B, dans cette condition chaque élément de l'ensemble de résultat

de la mesure est un élément quelconque de l'ensemble F_B.

Puisque le résultat r_B de mesure est inconnu, tout élément de F_B est susceptible d'être r_B, par suite sous ensemble $E_{B,x}$ de résultat de mesure sur B, ou x est un élément quelconque de F_B, est susceptible d'être l'ensemble des éléments initiaux associés au véritable résultat de mesure, cet élément étant inconnu, l'ensemble F_B devrait être la réunion de chacun de ces ensembles. Par contre si l'objectivité totale n'existe pas, l'opération de mesure aura une influence sur le résultat et le résultat n'est pas déterminé d'une manière objective, dans cette condition l'ensemble de résultats de mesure n'est pas contenu dans l'ensemble F_B, ce qui signifie que toute analyse de F_B, est sans signification physique.

INTERACTION ENTRE L'APPAREIL DE MESURE ET LE SYSTEME EN OBSERVATION

Le formalisme actuel de la mécanique quantique permet de calculer, en principe, les valeurs probables des résultats de mesure à partir de résultats de mesures initiales. La valeur moyenne d'une observable M est donnée par définition de la façon suivante : $\langle M \rangle = \int \psi M \psi^* dv$ où ψ représente la fonction d'onde du système et ψ^* est la complexe conjuguée de ψ. Si la mécanique quantique est capable de donner une description complète des évènements, elle devrait pouvoir décrire également les processus d'observation en terme de fonctions d'ondes des appareils de mesures et du système en observation. En plus elle doit en principe décrire en terme de fonction d'onde l'observateur lui-même. Dans ce qui suit nous montrons comment on peut traiter ce problème dans le cadre de la théorie quantique.

LA NATURE DES APPAREILS DES MESURES :

Nous représentons les appareils de mesure par A et le système physique soumis à l'étude, par S. Pour effectuer une mesure il y aura bien entendu une interaction entre A et S et l'étude de cette interaction nous donne des informations sur le système S. Les propriétés connues, même partiellement,

d'un objet peuvent en principe être utilisées pour la construction des appareils de mesure. Par exemple pour se rendre compte de la force d'interaction entre neutron et proton, on étudie normalement la diffusion de ces particules. Dans ce cas la force mal connue d'interaction entre neutron et proton sera investiguée par l'observation des effets que ces forces font subir sur les mouvements de longue portée, mieux connus de ces mêmes particules. Nous remarquons enfin que les appareils de mesure ne sont pas tous construits par l'homme nécessairement, il ne sont pas tous localisés dans le laboratoire non plus. Le champ magnétique terrestre peut être regardé comme une partie de spectrographe de masse qui sépare les particules des rayons cosmiques suivant leur masse et leur charge.

Quoique chaque observation soit effectué par une interaction, le simple fait d'interaction n'est pas en soi-même suffisant pour faire une observation significative possible, car après l'interaction l'état de l'appareil A doit être correlé à celui du système S d'une façon reliable et reproductible. Cette corrélation est en général statistique, mais dans le cas limite elle peut approcher un degré concevable d'exactitude. Alors, on peut mesurer la position d'une étoile en observant la position d'un spot sur une plaque photographique, le spot est produit par la lumière de l'étoile qui a traversé un télescope ; l'interaction entre l'étoile et la

plaque photographique est dûe au caractère électromagnétique de l'onde lumineuse qui est capable de changer les conditions chimiques de l'atome d'argent de l'émulsion sensible de la plaque.

Un télescope idéal et un système de caméra peuvent produire une corrélation unique entre la position de l'étoile et celle du spot. Aucun téléscope réel et système caméra ne sont capables de faire cette mesure précise parce que :

a) En pratique il y a des erreurs inévitables dans leur fonctionnement ;

b) la nature ondulatoire de la lumière produit un pouvoir fini de résolution.

Alors, dans un appareil typique de mesure nous obtenons une corrélation telle que chaque état distinguable de l'appareil corresponde à un intervalle des états possibles du système. Cet intervalle peut être appelé l'incertitude ou erreur de mesure.

L'existence de l'erreur est dûe aux défauts de construction des appareils qui sont en principe inévitables. Dans le cas extrême de précision de mesure l'erreur peut pourtant surgir de la nature quantique de la matière, dans ce cas une mesure plus précise ne peut être effectuée sans changer l'observable d'une manière fondamentale.

DESCRIPTION CLASSIQUE DES APPAREILS DE MESURE :

Nous remarquons d'abord qu'au point de vue de la théo-

rie quantique l'univers entier doit être considéré comme une unité indivisible (l'observateur compris). S'il était nécessaire de donner au monde une description complètement quantique, une personne employant la théorie quantique pour le processus d'observation serait en face d'un paradoxe insoluble. Parce qu'il voudrait alors considérer lui-même comme un objet inséparable du reste du monde, tandis que l'idée d'observation implique que l'observable soit totalement distinct de l'observateur. Ce paradoxe peut être résolu en notant le fait que toutes les observations réelles sont dans le dernier état d'analyse, expérimentales classiquement. L'observateur peut donc ignorer les liens quantiques qui produisent des effets troppetits pour pouvoir introduire une erreur appréciable, autrement dit, l'interaction entre l'observateur et l'appareil est telle que les fluctuations statistiques résultantes sont négligeables par rapport aux erreurs expérimentales. Il est donc raisonnable d'approximer la relation entre l'observateur et l'appareil et dire qu'ils sont deux systèmes séparés interagissant suivant les lois de la physique classique. En plus il est possible que plusieurs observateurs interagissent avec le même appareil sans changer d'une façon essentielle sa propriété.

Les configurations possibles de l'appareil, correspondant aux résultats possibles de mesures, peuvent donc exister séparément et indépendamment de tout observateur. La théo-

rie quantique de mesure peut être réduite à une description de la relation entre l'état du système et celui d'un certain appareil qui est décrit classiquement.

La discussion précédente est cependant imprécise et est destinée seulement à indiquer l'approximation qui justifie l'application de la théorie classique d'observation dans laquelle l'observateur et l'appareil sont considérés comme des systèmes séparés même s'ils sont en réalité liés par les quanta.

Dans le reste de cette discussion nous donnerons une description plus précise mais relativement simple, en donnant une discussion mathématique de ce qui se passe dans le processus d'observation, et nous montrons essentiellement qu'on obtient les mêmes résultats.

S'il n'était pas possible de distinguer d'une façon précise l'observateur de l'observable, il ne serait pas possible de faire de la recherche scientifique, parce que l'observateur ne pourrait pas connaître quel aspect de l'observation lui est dû et quel aspect est dû aux autres systèmes en dehors de celui auquel il s'intéresse.

Nous ne voulons pas cependant dire que la recherche scientifique est nécessairement impossible s'il y a une interaction significative entre l'observable et l'observateur, car si l'observateur peut corriger l'effet de cette interaction sur la base des lois connues causales, il peut encore

distinguer les effets dûs à lui-même et ceux dus aux restes. Mais si par exemple l'interaction est dûe à un quantum indivisible et incontrôlable, cette sorte de correction ne pourrait pas être faite. L'observateur ne serait pas alors capable de dire si ce qu'il a observé lui est relié ou relié à un objet extérieur, puisque le quantum connectant les deux, appartient mutuellement et indivisiblement à tous les deux. Puisque l'interaction entre l'observateur et l'appareil dans toutes les observations réellesest exprimable classiquement ; cette difficulté n'arrive évidemment jamais.

LA LIMITE DES DISTINCTIONS ENTRE L'OBSERVABLE ET L'OBSERVATEUR :

Dans un évènement où il y a plus d'un appareil de mesure exprimable classiquement, une certaine description peut être choisie afin de séparer l'observable et l'observateur.

Considérons par exemple une expérience dans laquelle on obtient de l'information par une photographie.

Une description possible de cette expérience est la suivante : Le système observé consiste en les objets photographiés, l'appareil de mesure est l'appareil photographique et la lumière est ce qui connecte l'objet et l'image. L'observateur obtient alors, son information en regardant la plaque après développement. Puisque ce processus est exprimable classiquement, il y a une distinction précise entre

l'observateur et la plaque qu'il regarde. Une autre description également bonne, est cependant possible ; on regarde le système soumis à l'étude comme l'objet lui-même ; la camera et la plaque peuvent alors être considérées comme partie de l'observateur. Une troisième description de la même procédure pourrait être donnée, l'observateur observe l'image sur la rétine de ses yeux, la rétine et le reste du monde (plaque photographique comprise) sont le système soumis à l'observation.

Pour résumer les résultats de la discussion précédente nous disons que le processus par lequel un observateur obtient son information comprend normalement une série de descriptions classiques. Si la connection entre l'observateur et l'observable lui permet d'obtenir de l'information reliable, ces descriptions doivent agir causalement et de la manière qu'il y ait une correspondance biunivoque entre les différentes étapes. Alors, un spot défini sur un objet pourrait produire un spot correspondant sur la plaque photographique, et cela produirait un spot correspondant sur la rétine de l'oeil. Dans la mesure ou cette correspondance existe la séparation entre l'observateur et l'observable peut être considérée expérimable classiquement dans chaque étape.

Nous voulons maintenant savoir la limite de cette distinction dans les deux directions. C'est-à-dire dans la direction de l'objet soumis à l'expérience ou dans la direc-

tion du cerveau de l'observateur. Nous supposons que l'appareil transmet d'une façon fidèle l'information concernant la nature de l'objet. Alors, la seule restriction imposée sur la limite de distinction c'est que la distinction ne peut pas être effectuée dans une étape essentiellement quantique. Si nous voulons observer la position et la quantité de mouvement d'un électron au niveau quantique, nous devons considérer l'électron et les quanta de lumière employés pour l'observation comme une partie indivisible du système combiné.

Eventuellement ces quanta de lumière sont capables de faire apparaître des processus classiques, par exemple, production de spot sur une plaque photographique où la distinction est possible.

Considérons maintenant, la limite de distinction entre l'observable et l'observateur dans le cerveau. Avant de commencer nous voudrons remarquer que la question n'a pas d'influence sur la théorie de la mesure, puisque comme nous l'avons déjà vu, il est nécessaire de discuter l'analyse de l'étape exprimable classiquement de l'appareil. Si par exemple, le cerveau contient essentiellement des élements quantiques, alors, le point de distinction ne peut pas être poussé jusqu'à ces éléments. Même si le cerveau fonctionne d'une façon classique, le point de distinction cesse d'être arbitraire, parce que la réponse du cerveau ne peut avoir une correspon-

dance biunivoque avec le comportement de l'objet. Pour illustration de ce problème nous pouvons commencer avec le nerf optique qui est à peu près exprimable classiquement. Ce nerf semble fonctionner seulement comme un émetteur de signal, et il répond d'une manière biunivoque à l'image sur la rétine. Alors on peut dire que l'observateur obtient l'information visuelle en observant les signaux venant le long du nerf optique. Des signaux similaires à ceux causés par les lumières peuvent être obtenus par stimulation électrique ou mécanique de ce nerf. Si nous essayons de continuer ce type de description jusqu'au cerveau nous arrivons à un domaine plus complexe.

Il semble cependant à peu près certain qu'avant que l'observateur se rende compte de ces signaux ils doivent parcourir plusieurs systèmes complexes de nerfs pour donner lieu à la vision de l'objet. La perte d'une partie du cerveau par exemple, empêche la reconnaissance des objets même si les yeux et les nerfs optiques sont dans un bon état. Alors, il semble donc qu'une personne peut affirmer l'observation d'un signal après que celui-ci a parcouru la partie réservée du cerveau pour la reconnaissance de l'objet.

Pratiquement rien n'est connu au sujet détaillé de ce qui arrive au signal dans l'étape suivante. Il y a cependant une bonne raison d'attendre que la description en terme de propagation d'un signal qui a une correspondance biunivoque avec le comportement de l'objet devient inadéquate. La raison

est que le circuit nerveux dans le cerveau permet fréquemment l'alimentation de l'impulsion qui arrive d'un point à l'autre. Dans ce cas là, il n'est plus correct de dire que le rôle d'un nerf donné est seulement d'emporter les signaux extérieurs, parce que chaque nerf peut alors mélanger d'une façon non-linéaire les effets des signaux venant d'une autre partie du cerveau aussi bien que de l'extérieur.

Arrivé à cette étape, l'analyse en terme d'une division entre deux systèmes distincts, c'est à dire l'observateur et le reste du monde devient inapropriée, par contre il est probablement mieux de dire que toutes les parties de cerveau sont couplées significativement par la réponse, comme un tout.

C'est cette réponse comme une unité qui serait probablement considérée comme le processus par lequel l'observateur s'aperçoit du signal incident. Il semble donc que la division entre l'observateur et le reste du monde ne peut pas être généralisée arbitrairement jusqu'au cerveau.

Vue la connaissance incomplète au sujet de fonctionnement détaillée du cerveau, c'est mieux que l'analyse de l'appareil soit fait d'une manière classique.

TRAITEMENT MATHEMATIQUE DE PROCESSUS DE L'OBSERVATION :

Pour la description quantique du processus de l'observation nous devons commencer par la résolution de l'équation de Schrödinger en tenant compte des effets des appareils de

mesure. Avant que l'expérience commence, l'appareil A et le système B ne sont pas en général couplés, par exemple quand nous prenons une photo, nous couplons la plaque à l'objet en ouvrant le diaphragme pour un certain temps, avant cela il n'y a aucune interaction significative entre la plaque et l'objet. Il est facile de voir que ce manque de couplage avant que l'expérience commence est vrai pour tous les processus de mesure.

Avant l'interaction l'opérateur Hamiltonian peut s'écrire :

$$H = H_A + H_S = H_A\ (y) + H_S\ (x)$$

ou H_A est l'Hamiltonien de l'appareil et H_S est l'Hamiltonien du système tout seul.

Le fait qu'il n'y a pas de couplage entre ces deux est donné en prenant pour H_S une fonction des variables x du système et H_A une fonction des variables y de l'appareil.

Dans ce traitement élémentaire par soucis de simplicité, nous supposons que l'appareil est dans un état bien déterminé avant l'expérience. Pour noter l'état de l'appareil nous prenons une fonction d'onde de l'appareil de la forme f(y,t). La dépendance du temps de f(y,t) indique que l'appareil peut changer d'état.

A cetté étape de discussion il n'est pas nécessaire de spécifier la nature de f(y, t). Il faut noter cependant, à cause du fonctionnement classique de l'appareilque la fonc-

tion f(y,t) peut généralement prendre la forme d'un paquet d'onde; Prenons un exemple : si y représente la position de l'aiguille d'un ampéremètre, le paquet d'onde f(y,t) représente alors, l'intervalle dans lequel la position de cette aiguille est définie.

Supposons que la période libre de l'oscillation de l'aiguille soit de 0,1 seconde, la distance entre les états quantiques sera :

$$\Delta E = h\nu = 6{,}6 \times 10^{-26} \text{ erg}$$

Pour obtenir un ordre de grandeur de déplacement x de l'aiguille correspondant a un saut quantique nous employons les formules d'énergie :

$$E = \frac{1}{2} mw^2x^2, \qquad \Delta E = mw^2x \Delta x \quad \text{ou} \quad \Delta x = \frac{\Delta E}{mw^2 x}$$

prenant x = 1 mm, et m = 1 mg, nous obtenons $\Delta x = 10^{-26}$ cm. Il est clair que dans aucune circonstance on ne peut employer un ampéremètre avec une pareille précision. L'état du système n'est pas connu, mais il est l'objet de mesure afin d'obtenir une certaine information à ce sujet.

Supposons que la fonction d'onde du système S soit développée en fonction d'une série $v_m(x,t)$ de fonctions orthonormales, solution de l'équation de Schrödinger :

$$\Psi_s = \sum_m C_m V_m(x,t)$$

où les C_m sont les coefficients inconnus.

Pendant l'interaction, un troisième terme apparait dans l'Hamiltonien c'est l'Hamiltonien d'interaction noté par

$H_I(x,y)$.

Nous obtenons alors :

$H = H_S(x) + H_A(y) + H_I(x,y)$

C'est le terme $H_I(x,y)$ qui introduit la corrélation entre l'état du système S et l'appareil A d'où la possibilité de mesure.

Une corrélation suffisamment forte peut rendre possible une mesure, en plus l'interaction doit avoir lieu pendant un certain temps minimum Δt qui est inversement proportionnel à l'intensité de l'interaction. Si l'appareil et le système n'agit pas pendant un temps minimum nécessaire, nous ne pouvons pas effectuer une mesure. Cependant, l'interaction peut être supprimée après un certain temps Δt, mais pour plusieurs types d'appareils le temps d'interaction doit être compris dans un certain intervalle défini de façon que le résultat de l'expérience ne soit pas détruit. Par exemple dans une caméra on contrôle le temps d'interaction par un déclancheur. Si ce temps est très court, on n'obtient pas une image précise. Le temps minimum est inversement proportionnel à l'intensité de la lumière, c'est-à-dire à l'intensité de l'interaction. Si le déclancheur reste ouvert pendant longtemps, on no'btient pas non plus l'image désirée. Quand on a noté les résultats d'une observation, on a une situation dans laquelle les résultats sont découplés du système de façon que les observateurs peuvent consulter le résultat sans effectuer

le système S. Quoiqu'il ne soit pas nécessaire que les résultats de toute observation soient notés quelque part, il est certainement vraique toutes les données d'observation ont la propriété de pouvoir être notées.

Notre but est de montrer que la théorie quantique est capable de se rendre compte d'une façon consistance du processus de mesure. Nous nous vonfions donc aux cas dans lesquels les données sont notées. Autrement dit, nous supposons qu'après un certain temps Δt l'étape finale de l'appareil est découplée du système. Puisque le processus de noter les résultats peut toujours être en principe automatique, il est clair que quand l'observateur obtient son information, il n'a aucun besoin de produire un changement sur le système S. Cela signifie que tous les changements du système S sont produits seulement par action de l'appareil, tandis que l'effet de l'observateur en obtenant son information est un effet classique qui est négligeable comme nous l'avons vu.

Après l'interaction l'état du système S peut être changé pour deux raisons :

1 - les variables d'observation ne sont pas intégrales premières du mouvement même pour le système non perturbé : la position d'une particule libre en mouvement change d'une façon continue au cours du temps.

2 - L'interaction avec l'appareil peut introduire d'au-

tres changements; la mesure de la quantité de mouvement $\vec{P}$ d'une particule changée passée à travers une chambre de Wilson, est accompagnée d'un changement de $\vec{P}$ parce qu'il existe un champ magnétique, en plus, la particule entre en collision avec les molécules du gaz de la chambre. En ce qui concerne la théorie de la mesure, le changement de la variable soumise à l'observation, introduit des complications inconséquentes.

Nous verrons qu'il est en principe possible de construire un appareil qui mesure une variable donnée sans la changer au cours de la mesure, (en accord avec le principe d'incertitude, les variables conjuguées doivent intervenir d'une façon incomplètement contrôlable). Une méthode pour réaliser ce résultat est la suivante : Nous faisons d'abord une mesure IMPULSIVE. Cela signifie que l'interaction dure très peu de temps de façon que le changement de la variable soumise à l'observation soit négligeable.

Nous pouvons mesurer la position d'une particule à l'aide d'un signal lumineux dans un temps très court tel que la particule ne parcourt pas une distance appréciable.

Pour photographier une particule dans un temps très court, on a cependant besoin d'une source intense de lumière. Plus généralement une mesure impulsive implique une interaction durant un temps très court. Quand la mesure impulsive a lieu, les termes $H_S(x)$ et $H_A(y)$ produisent des changements

dans la fonction d'onde, ces changements sont négligeables par rapport au changement introduit par $H_I(x, y)$. Durant ce temps (et durant ce temps seulement) l'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \qquad \text{où} \quad H = H_A + H_S + H_I$$

Avant et après le temps d'interaction on a :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_A + H_S)\psi$$

pendant l'interaction des fonctions $u_n(y,t)$ et $v_m(x,t)$ qui sont les solutions de l'équation de Schrödinger pour $H_I = 0$, peuvent dont être considérées comme constantes dans le temps. Nous les désignerons par $u_n(y)$ et $v_m(x)$.

La mesure impulsive évite donc tout changement dans les variables de l'observation. Nous avons vu que dans une mesure impulsive l'énergie de l'interaction est trop grande, comment pouvons-nous éviter le changement dans les variables d'observation ?

Pour répondre à cette question nous désignons l'observable par l'opérateur M ayant des valeurs propres m, et les fonctions propres par $v_m(x)$. Si l'état de l'appareil est correlé avec la variable M, il est nécessaire que H_I dépende au moins de M et de y. H_I est choisi diagonal dans la même représentation que M est diagonal, les éléments de matrice de transition d'une valeur de m à une autre valeur $m' \neq m$ s'annule. Cela signifie que l'interaction ne peut pas changer le M même si elle est assez grande.

Afin d'avoir H_I et M diagonal simultanément nous choisissons :

$$H_I = H_I\ (M,y)$$

C'est à dire H_I est une fonction seulement de M et de y. De cette manière nous avons accompli notre objectif qui était la construction d'un appareil de mesure qui ne change pas la variable M.

Quand les variables d'observation changent au cours de la mesure, on peut en général corriger ces changements. Par exemple dans la mesure de la quantité de mouvement à l'aide de l'effet Doppler, nous savons que la quantité de mouvement change d'une valeur définie, ce qui nous permet de corriger la mesure.

Dans le cas ou H_I est petit par rapport a $H_A + H_S$, mais ne peut pas être négligé, on peut le traiter comme une petite perturbation et résoudre par approximation l'équation de Schrödinger, ce qui donne une correction ΔQ pour la quantité Q soumise à la mesure. On aura donc $Q = (Q_o + \Delta Q)$ ou Q_o est la valeur non-perturbée et ΔQ peut être positif ou négatif. Cela nous détermine un intervalle dans lequel se trouve la quantité Q.

Nous voulons maintenant discuter un cas simple dans lequel la variable M ne change pas au cours de la mesure. Parce qu'il est possible toujours en principe de faire la mesure de cette façon, nous concluons qu'un traitement de ce type

de mesure est adéquat pour montrer que la théorie quantique est à même de donner une description consistante de processus de mesure.

Nous mettrons l'équation de Schrödinger sous une forme particulière convenable. Considérons la fonction d'onde du couple $\psi(x, y, t)$ qui représente l'état du système S et de l'appareil A durant le temps de la mesure. Quand ψ est considéré comme une fonction de x, il est clair que le développement postulé nous permet d'écrire :

$$\psi(x,y,t,) = \sum_m f_m \, v_m \, (x)$$

ou $$f_m = \int v_m^*(x) \, \psi(x,y,t) dx$$

Les v_m sont les fonctions propres de l'opérateur M. Il est facile de voir que les f_m sont en général fonction de y et de t.

Nous obtenons alors :

$$\psi(x,y,t,) = \sum_m f_m(y,t) \, v_m(x)$$

L'équation Schrödinger devient :

$$i\hbar \sum_m \frac{\partial f_m(y,t)}{\partial t} V_m(x) = \sum_m H_I \, f_m(y,t) \, V_m(x)$$

Parce que H_I est une fonction de M, nous aurons :

$$i\hbar \sum_m \frac{\partial f_m(y,t)}{\partial t} V_m(x) = \sum_m H_I(m,y) \, V_m(x) \, f_m(y,t)$$

où nous avons remplacé l'opérateur M par le nombre m correspondant à la fonction propre sur laquelle H_I agit.

La multiplication par $v_r(x)$ et l'intégration par rapport à x, nous donne :

$$i\hbar \frac{\partial f_r(y,t)}{\partial t} = H_I(r,y) \, f_r(y,t)$$

Cela signifie que l'appareil subit un changement d'état qui est différent pour chaque valeur r du système variable M.

Si l'interaction est assez forte et s'il est permis de continuer pendant un temps assez long, le changement des variables décrivant l'appareil seront si grands que l'état de celui-ci dépendra de la valeur de l'observable M.

C'est cette corrélation entre les deux séries d'observables qui peut être utilisée pour faire une mesure.

INTERPRETATIONS RECENTES DE LA THEORIE QUANTIQUE

RELATION ENTRE LES CONCEPTS QUANTIQUES ET CLASSIQUES

Nous voulons examiner à fond la relation entre les concepts classiques et quantiques, afin de montrer que la théorie quantique dans sa forme actuelle, en réalité présuppose l'exactitude du concept classique.

Commençons par un résumé de l'opposition entre les concepts classiques et quantiques. Les concepts classiques sont caractérisés par trois hypothèses concernant les propriétés de la particule.

(1) L'univers peut être analysé en éléments distincts.

(2) L'état de chaque élément peut être exprimé en termes des variables dynamiques qui sont déterminables avec une haute précision arbitraire.

(3) L'inter-relation entre les parties d'un système peut-être exprimée à l'aide des lois causales qui définissent les changements des variables dynamiques avec le temps en terme de leurs valeurs initiales. Le comportement du système considéré comme un tout peut être regardé comme le résultat de l'interaction de toutes ses parties.

Il est caractéristique du domaine classique qu'il y a des objets, des phénomènes, et des évènements qui sont distincts l'un de l'autre etqui montrent des propriétés reproductibles en lesquelles ont peut avoir confiance et à l'aide desquelles ils peuvent être identifiés et comparés.

Quand nous voulons examiner les concepts quantiques, nous trouvons d'abord que l'on se heurte à une difficulté de langage et à des modes d'expression difficiles à manier parce que la langue scientifique habituelle correspond à la précision classique.

Comme nous l'avons vu, les propriétés quantiques de la particule doivent être associées au potentiel incomplètement défini que l'on ne peut réaliser que dans l'interaction avec un système exprimable classiquement.(l'appareil de mesure est un cas spécial). Puisque même les propriétés intrinsèques du système (onde ou corpuscule) apparaissent seulement dans l'interaction avec les autres systèmes, il est clair que les propriétés quantiques d'une particule impliquent l'indivisibilité de la totalité des système qui entrent dans l'interaction et qui forment un tout. Alors, nous avons contredit les hypothèses (1) et (2) de la théorie classique, puisque au niveau quantique, il n'existe ni des éléments bien-définis ni des variables dynamiques à valeurs bien-définies qui expriment le comportement de ces éléments.

Naturellement, l'hypothèse (3) n'est pas satisfaite

puisque dans la théorie quantique il n'y a pas de variables bien définies, l'application des lois causales est sans signification. En effet, au lieu d'avoir des varia bles bien définies qui sont en correspondance biunivoque avec le comportement réel des particules, au niveau quantique, nous avons une fonction d'onde qui est seulement la correspondante statistique de ce comportement.

C'est dans l'interprétation de la fonction d'onde que les théories quantiques et classiques se rencontrent. L'interprétation physique de la fonction d'onde est toujours en terme de probabilités quand un système interagit avec l'appareil de mesure. Une fois la mesure faite on obtient une valeur définie pour la variable qui est mesurée. Mais comme nous l'avons déjà vu, la dernière étape de l'appareil de mesure est toujours classiquement exprimable. En effet, c'est seulement au niveau classique que le résultat d'une expérience de mesure peut être obtenu en prenant la forme d'évènements distincts qui sont en correspondance biunivoque avec les différentes valeurs possibles de quantités physiques qui sont sujettes à une mesure. C'est-à-dire, que sans renvoyer au niveau classique, la théorie quantique est sans signification. Nous concluons donc, que la théorie quantique présuppose le niveau classique et l'exactitude des concepts classiques pour ce niveau ; en plus, la théorie quantique ne déduit les concepts classiques que comme la limite deconcepts quantiques.

A première vue, on peut faire des objections à la conclusion précédente et suggérer que nous pouvons éliminer la nécessité de présupposer le niveau classique en utilisant la procédure habituelle qui consiste à s'approcher de la limite classique à l'aide des approximations fournie par la méthode BKW. Mais cette objection n'est pas valable, parce que même quand nous avons défini le paquet d'onde, nous avons fait remarquer que c'est dans un ordre d'exactitude classique et éventuellement il s'étend sur une grande distance. Mais encore que l'objet de mesure (par exemple, un électron) peut être toujours trouvé dans une très petite région arbitraire de l'espace, quand la position de cet objet est sujette à une mesure. Nous concluons qu'une description au niveau quantique (c'est à dire seulement, en terme de fonction d'onde) ne présente pas en général le caractère des propriétés physiques que l'électron est capable de manifester quand il interagit avec un appareil de mesure.

Afin d'obtenir une méthode d'interprétation de la fonction d'onde, nous devons donc d'abord postuler un niveau classique en termes duquel le résultat d'une mesure peut être exprimé. Donc, le principe de correspondance est simplement une condition consistante qui demande que quand la théorie quantique plus son interprétation classique est mise à exécution à la limite des nombres quantiques, nous obtenions la théorie classique.

LES INTERPRETATIONS CAUSALES

La discussion précédente montre que les concepts classiques interviennent d'une façon essentielle en théorie quantique. On peut alors se demander si on pourrait revenir alors uniquement aux principes classiques. Ces dernières années M. Louis de Broglie a proposé une interprétation en termes classiques de la mécanique ondulatoire sous le nom d'interprétation causale.

Dans cette interprétation le corpuscule est en somme considéré comme un point matériel classique obéissant aux équations de la mécanique classique avec des forces supplémentaires dites forces quantiques. Ceci résulte de la décomposition de l'équation d'ondes (1) en module et argument de façon à avoir des équations réelles. Considérons un corpuscule en mécanique ondulatoire non relativiste soumis à une force, dérivant d'un potentiel V ; son équation d'ondes est, un explicitant l'hamiltonien.

(1) $$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi$$

Posons, $$\psi(P,t) = a(P,t)\,e^{ik\varphi(P,t)} \qquad \left(k = \frac{1}{\hbar} = \frac{2\pi}{h}\right)$$

puis séparons l'équation d'ondes (1) en deux équations réelles (1), correspondant à la partie réelle et à la partie imaginaire

(1) Louis de Broglie - Introduction à la mécanique ondulatoire (Hermann Paris 1930).

après avoir multipié les deux membres par $e^{-ik\varphi}$ en utilisant les expressions suivantes pour

$$\Delta\psi \text{ et } \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (1)$$

$$(3) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = e^{ik\varphi}\left(\frac{\partial a}{\partial t} + ika\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$(4) \qquad \Delta\psi = e^{ik\varphi}\left[\Delta a + ika\Delta\varphi + 2ik\,\mathrm{grad}\,a\cdot \mathrm{grad}\,\varphi - k^2 a(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\right]$$

on obtient ainsi les deux équations :

$$(5) \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\Delta a - \frac{1}{k^2}a\cdot(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\right] + Va - a\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

$$(6) \qquad -\frac{\hbar}{2m}\left[a\Delta\varphi + 2\,\mathrm{grad}\,a\cdot\mathrm{grad}\,\varphi\right] + \hbar\frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

La fonction a est supposée non identiquement nulle et finie tout au plus en un nombre fini de points. On peut donc multiplier par $\frac{1}{a}$ les deux membres de l'équation (5) pour obtenir une équation équivalente :

$$(7) \qquad \frac{1}{2m}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta a}{a} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

---

(1) Cf. J.L. Destouches. La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules (Gauthier-Villars Paris 1956) ch. I.

multiplions l'équation (6), par 2 a, nous obtenons une équation équivalente avec les hypothèses faites sur a. En tenant compte de l'identité :

(8) $$\operatorname{div}(a^2 \operatorname{grad} \varphi) = \nabla(a^2 \nabla \varphi) = 2a \operatorname{grad} a \cdot \operatorname{grad} \varphi + \left[a^2 \Delta \varphi \right]$$

on obtient après division par :

(9) $$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\frac{1}{m} a^2 \operatorname{grad} \varphi\right) = 0$$

Les équations (7) et (9) admettent une première interprétation en termes classiques : l'équation (7) est l'équation de Jacobi d'un point matériel soumis à une force dérivant du potentiel

(10) $$V_{tot.} = V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a}$$

Le premier terme est le potentiel du problème classique correspondant, le second terme est le potentiel quantique de M. Louis de Broglie. La fonction ψ s'interprète ainsi comme la fonction de Jacobi du point matériel soumis au potentiel $V_{tot.}$ et ce point matériel figure le corpuscule.

Le potentiel quantique dépend de la fonction a et de ses dérivés et la fonction a est liée à φ par l'équation (9) - Cette équation peut être interprétée comme une équation de champ : un champ scalaire $\rho(P,t)$ défini par :

(11) $$\rho(P,t) = a^2$$

et qui obéit d'après (9) à l'équation :

(12) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\frac{1}{m}\rho \operatorname{grad} \varphi\right) = 0$$

A ce champ se trouve associé une force qui dérive d'un potentiel calculable à partir de ρ selon la formule(10), soit

(13) $$V_Q = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

De cette façon le champ ρ influe sur le mouvement du point matérielet le mouvement du point réagit sur le champ par la présence de la vitesse de ce point dans l'équation du champ car d'après les formules de la mécanique classique on a :

(14) $$p = mv = -\operatorname{grad} \varphi$$

Ainsi d'une manière purement formelle on peut interpréter l'équation (7) comme l'équation de Jacobi d'un point matériel soumis au potentiel du problème classique correspondant augmenté du potentiel quantique qui est lié au champ scalaire ρ sur lequel le point matériel réagit, l'équation de ce "champ quantique" étant l'équation (12) ou l'influence du point matériel s'exprime par la vitesse.

Il y a une seconde interprétation des équations (7) et (9) qui est bien connue, c'est celle du <u>fluide de probabilité</u> : (7) est l'équation d'évolution du potentiel des vitesses Φ de ce fluide, car on a d'après

(14) $$\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{m}\operatorname{grad} \varphi$$

et (9) est l'équation de conservation, ρ étant la densité du fluide.

Il semblerait donc que l'on peut interpréter complètement la fonction d'ondes en termes de la physique classique, mais ceci n'est qu'une apparence. En effet, comme il résulte de ce qui a été écrit plus haut la fonction d'onde ψ ne peut être interprétée qu'en termes de prévisions, de statistique ; elle est liée aux connaissances acquises sur le système et n'exprime pas une propriété objective du corpuscule. Alors on aurait un mouvement dont les forces quantiques (données par (13)) ne seraient pas objectives mais liées à des connaissances ceci est insoutenable. C'est ce qui avait conduit Monsieur Louis de Broglie à renoncer en 1927 à son interprétation. Il l'a reprise ces dernières années sous le nom de théorie de la double solution : cette fois il y aurait deux types d'ondes : une onde statistique ψ avec la signification habituelle, et une <u>onde physique</u> u qui caractériserait le corpuscule, les deux ondes ayant même phase après une courte période transitoire qui suivait une mesure :

$$\psi = a e^{iks} \qquad u = f e^{iks}$$

C'est le couplage de l'onde u avec un milieu subquantique chaotique et désordonné qui aurait pour effet de faire tendre la phase de l'onde u rapidement vers la valeur de celle de l'onde statique ψ.

On voit alors que l'interprétation causale de M. de Broglie consiste en une onde u qui s'interprète en termes

classiques équations (7) et (9) et en un processus stochastique qui fait tendre la phase de l'onde u vers celle de l'onde statistique ψ. Toutes les prévisions et résultat de mesures s'expriment au moyen de l'onde ψ et l'onde u n'est pas complètement fixée par des mesures. Du fait que l'onde u obéit à une équation de la forme (1) il y aurait ainsi description causale. Mais on ne peut échapper à un processus stochastique essentiel qui fait évoluer l'onde u autrement que selon (1), pour que la phase de l'onde u tende vers la phase de l'onde ψ, et ce processus n'est pas descriptible sans introduire des hypothèses supplémentaires. On n'échappe pas à l'introduction d'éléments de nature stochastique.

MESURE ET DESCRIPTION CAUSALE

Une autre façon de se représenter la liaison entre théorie quantique et description classique est la suivante : considérons la grandeur G du système S qu'un observateur se propose de mseurer au moyen de l'appareil A. Pour le système (S/A_G), la grandeur G est "grandeur d'état en apparence" tant que A_G est considéré comme l'appareil qui sert à mesurer la grandeur G de S. La description de (S/A_G) constitue donc une description selon une partie d'une théorie, description qui est, soit déterministe, soit essentiellement indéterministe (1)

(1) P. Destouches-Février, La structure des théories physiques Press. Univ. Paris 1951.

On peut donner une description déterministe de (S/A_G) s'il existe une grandeur G qu'on est libre d'imaginer, grandeur non mesurable en fait et donc grandeur cachée telle que $\hat{G} = C \S G$, où $\hat{G}$ est une grandeur autoprévisible, et s'il n'existe pas de grandeur B non simultanément mesurable avec G (le signe $\wedge$ placé au-dessus d'une lettre qui figure une grandeur signifiera dans ce qui suit qu'il s'agit d'une telle "grandeur cachée" librement imaginée, inaccessible à l'expérience et donc de caractère purement métaphysique puisqu'il est impossible d'ne définir un processus de mesure). On ne pourra fournir au contraire qu'une description essentiellement indéterministe s'il existe une grandeur B non simultanément mesurable avec G.

Pour le système $(S + A_G)$ considéré comme système observable, il existe au moins une grandeur B non simultanément mesurable avec G puisque c'est un système consituté de corpuscules microphysiques et ainsi $(S + A_G)$ considéré comme système observable au moyen d'appareils A', A",... n'admet qu'une description essentiellement indéterministe.

Autrement dit, qu 'il y ait ou non en droit pour un système physique S_1, des grandeurs incomposables, si l'on se limite à l'observation d'un ensemble de grandeurs toutes simultanément mesurables, on peut définir, pour ce système S_1, un schéma quantique usuel. C'est ce qui se passe pour le sys-

tème S/A_G où l'on se limite à l'observation de la seule grandeur G. L'inadéquation d'un schéma déterministe et réaliste n'apparait dans la description théorique que si celle-ci comporte des grandeurs non simultanément mesurables. Si l'on renonce à toute mesure de grandeurs non simultanément mesurables avec les grandeurs considérées, on ne peut pas prouver, au niveau du fait, l'inadéquation du schéma réaliste. En effet, le fait d'effectuer une mesure de la grandeur G sur le système S avec l'appareil A_G exclut une mesure simultanée de toute grandeur incomposable avec G, à la fois sur S, sur $(S+A_G)$ et sur (S/A_G). Il y a donc une impossibilité de fait de prouver l'impossibilité d'une description déterministe.

Ainsi, lors de toute mesure sur S au moyen d'un appareil (S/A_G) peut être considéré comme obéissant à des lois déterministes cachées. Cela est dû au fait que quand un processus de mesure sur S se déroule, il est impossible d'effectuer une mesure incompatible avec la première. Cependant il n'existe pas de description déterministe cachée pour le système observable S considéré par le physicien comme l'objet de mesures éventuelles, même si ces mesures ne sont pas décidées ; cette description existe seulement pour (S/A_G), complexe formé par le système S et l'appareil de mesure A_G. Il existe d'une façon semblable, pour le complexe(S/A_B), une description a déterminisme caché, mais (S/A_G) et (S/A_B), sont des systèmes différents qui n'existent pas en même temps et dont

les descriptions à déterminisme caché sont différentes.

Tout d'abord on doit bien distinguer entre un système microphysique S, le système $(S + A_G)$ constitué par la réunion du système S et de l'appareil A_G et considéré comme un système microphysique qu'il faudra observer au moyen d'autres appareils, le couple (S/A_G) constitué par le système S en observation au moyen de l'appareil A_G. Les systèmes S et $(S+A_G)$ ne peuvent être décrits d'une manière déterministe et réaliste en vertu des critères d'indéterminisme essentiel. Par contre, une fois l'appareil A_G choisi et la mesure commencée, l'observateur ne dispose plus d'aucun arbitraire concernant la suite du processus engagé, pendant que ce processus de mesure se déroule, le système étudié n'est plus S mais le couple (S/A_G) objectivable comme devenu indépendant de tout choix de l'observateur. Ce couple se comportant comme un système sur l'évolution duquel les décisions de l'observateur ne peuvent plus jouer aucun rôle, évolue comme un objet déterminé indépendamment de toute observation, et peut être décrit d'une manière totalement objective.

Quand on effectue une mesure (possible selon la théorie quantique, si l'on fait une description objectiviste on ne détermine pas complètement l'état du système au sens classique, mais seulement une partie, on a un ensemble de mouvements possibles ; on est libre d'adopter une telle représentation, mais la notion "état" qu'on introduit fait intervenir des notions

inacessibles à l'expérience. Si l'onveut n'avoir que des grandeurs mesurables, alors il faut éliminer les grandeurs inaccessibles, on recourt au schéma de la mécanique ondulatoire usuelle.

L'inconvénient de ces schémas de type classique est qu'on perd la corrélation entre grandeurs non simultanément mesurables que donne la mécanique quantique usuelle et ceci est un grave inconvénient. Si bienque le retour à une interprétation classique a plus d'inconvénients que d'avantages.

REMARQUES SUR LES MESURES

En physique quantique il y a 2 types de mesures :

1° - Des mesures sur des conditions pour l'onde : par exemple, conditions aux limites, conditions de passage à travers des trous qu'il faut mesurer : ici on a des quantités macroscopiques et classiques à mesurer. La théorie classique des erreurs s'applique exactement.

2° - Des mesures proprement dites sur corpuscules, par des interactions d'un système avec des corpuscules.

Ceci s'effectue avec arrêt d'un corpuscule.

Alors, à la fin on fait une observation monoscopique sur l'appareil de mesure aussi selon les conditions classiques, mais il y a eu un intermédiaire selon les processus quantiques déseulés.

C O N C L U S I O N

Ainsi, partant de la description d'une opération de mesure, nous avons analysé les caractéristiques représentatives d'un instrument de mesure vis-à-vis des services qu'on lui demande de rendre ; puis nous sommes revenus à la mesure elle-même, bouclant un circuit dont l'importance découle de la position fondamentale de la science expérimentale.

En effet, cette science ne reçoit pas la vérité de sciences abstraites comme les mathématiques : "c'est elle qui est la maîtresse et les autres sciences sont ses servantes". Et si la méditation de cet énoncé peut nous ramener à disserter sur l'importance de l'appareil de mesure, elle doit surtout nous suggérer de suivre cette pensée de Claude Bernard, en insistant sur le rôle de l'expérimentateur.

Ce rôle est triple :

- Premièrement, l'expérimentateur doit être théoricien : ayant une question à poser à la Nature, il doit préparer son expérimentation : en expliciter les conditions, fixer la forme, le nombre et la précision des résultats, prévoir les caractéristiques d'emploi minimales exigées des appareils, choisir les méthodes d'exploitation des mesures.

- Deuxièmement, il doit être mécanicien : choisissant pour des instruments de mesure un compromis de caractéristiques aussi heureux que possible entre les exigences formulées et les moyens techniques disponibles.

- Troisièmement il doit être physicien : met tout en oeuvre les instruments, recommençant les mesures s'il est nécessaire, les critiquant avec honnêteté, c'est à dire avec un doute méthodique, de manière à pouvoir formuler un jugement sur la réponse que la Nature semble avoir donnée à ses questions, et qu'en théoricien il examine à nouveau.

Ce triple rôle subsiste que l'on se place au niveau de la physique macroscopique ou que l'on se place au niveau microscopique. L'intervention du quantum d'action intervient dans ce dernier cas pour modifier la forme des lois physiques, et pour empêcher certaines pièces de connaissances par des mesures sur un système. L'appareil de mesure joue donc un rôle essentiel dans la description théorique des phénomènes physiques (rôle qu'in n'a pas dans la description théorique des phénomènes à notre échelle) de plus il permet de transformer un phénomène microscopique élémentaire en un phénomène à notre échelle par le déclanchement d'un processus d'avalanche sur un dispositif instable (par exemple la chambre de Wilson); mais les conditions générales sur les méthodes de mesure,

ainsi que les méthodes de discussions des erreurs expérimentales, demeurent les mêmes quelle que soit l'échelle des phénomènes observés.

B I B L I O G R A P H I E

1 - Y. BEERS : Theory of Error 1957 - Addison Wesley Co

2 - David BOHM : Quantum theory. Prentice-Hall, New-York 1955.

3 - Louis de BROGLIE : La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire - Gauthier-Villars, Paris 1957.

4 - Louis de BROGLIE : Une tentative d'interprétation causale de la mécanique ondulatoire. Gauthier-Villars, Paris 1956.

5 - R.E. DAVIS & FOOTE : Surveying Theory and Practice, 1950 Mc Graw Hill Book Co.

6 - J.L. DESTOUCHES : Corpuscules et systèmes de corpuscules. Gauthier-Villars, Paris 1941.

7 - J.L. DESTOUCHES : La quantification en Théorie fonctionelle des corpuscules - Gauthier-Villars Paris 1956.

8 - P. DESTOUCHES-FEVRIER : La structure des théories physiques. Presses Universitaires de France. Paris 1951

9 - P.A.M. DIRAC : The principle of Quantum mechanics. Oxford University Press, London 1958.

10 - B. DUBUISSON : Procédés et Méthodes des levés topographiques aux Grandes Echelles. 1954, Eyrolles, Paris.

11 - P. FEVRIER : L'interprétation physique de la mécanique ondulatoire et de théories quantiques. Gauthier-Villars, Paris, 1956.

12 - J. GET : Triangulation Cadastrale : 1957
Eyrolles, Paris

13 - Reginald W.N. GIBBS : The Adjustement of Errors in Pratical Science.

14 - J. IDARC : Mesure et Instrument de Mesure : 1960
Dunod, Paris.

15 - Philip KISSAM : Surveying for Civil Engineers. 1956
Mc Graw Hill Book Co., N.Y.

16 - LIEBERMAN & BOWKER : Engineering Statistics, 1959,
Prentice-Hall, H.J.

17 - F. LONDON et E. BAUER : La théorie de l'observation en mécanique quantique. Hermann & Cie, Paris 1939

18 - A. MONJALLON : Introduction à la Méthode Statistique
1958 - Vulbert Paris.

19 - Felix OLLIVIER - Instruments Topographiques : 1955
Eyrolles, Paris

20 - J. &. E. REVAULT : La Topographie Pratique. 1956
J.B. Baillière. Paris

21 - C.F. SCHEFFEY : Engineering Measurement 1957 -
California Book Co. Calif.

22 - R.J. SWEENEY : Mesurement Techniquees in Mechanical
Engineering : 1953, John Wiley & Sons N.Y.

23 - S. TIMOSHENKO : Résistance des Matériaux 1953. Librairie
Polytechnique - Paris.

24 - T.N. WHITEHEAD : The Design and Use of Instruments and
Accurate Mechanism. 1954 Dover Publication,N.Y.

25 - WRIGHT & HAYFORD : Adjustment of Observations.
D. Van Nostrand Co., N.Y.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION 2

PREMIERE PARTIE : POINT DE VUE CLASSIQUE 4

- DIVERSES CLASSIFICATIONS DE LA MESURE 4

Les problèmes qui en résultent 6

Les mesures en topographie 10

- LES ERREURS SYSTEMATIQUES 11

Les conditions ambiantes 12

Les instruments de mesure 17

Ambiguité de définition 22

- LES ERREURS ACCIDENTELLES 24

Introduction par le cheminement et le nivellement 24

Considérations théoriques 26

Applications pratiques à la mesure d'angles horizontaux 34

- MESURES A PARAMETRES LIES 37

DEUXIEME PARTIE : POINT DE VUE QUANTIQUE 54

- CARACTERISTIQUES ET FORMALISME DE LA THEORIE QUANTIQUE 54

Les différences entre les lois classiques et les lois quantiques de la physique 54

Indivisibilité des processus quantiques 55

Probabilité et déterminisme incomplet dans les lois quantiques 57

L'invraisemblance des lois complètement déterministes 60

Le principe d'incertitude 61

L'interprétation du principe d'incertitude 62

Modification des mesures par les effets quantiques 63

Microscopie 64

Influence de la dualité onde-corpuscule de la matière sur la mesure 65

La distribution de probabilité en mécanique quantique 68

Probabilités des résultats de mesure de position et d'impulsion d'une particule 70

Perturbation incontrôlable lors de l'opération de mesure 71

Les corrélations et les fluctuations statistiques 74

Développement du formalisme de base de la mécanique quantique 76

Signification physique 78

Les observables qui commutent et les variables compatibles 78

Problème des prévisions 82

Opérateur d'évolution 83

Objectivité et subjectivité et la distinction entre elles 84

- INTERACTION ENTRE L'APPAREIL DE MESURE ET LE SYSTEME EN OBSERVATION 86

La nature des appareils des mesures 86

Description classique des appareils de mesure 88

La limite des distinctions entre l'observable et l'observateur 91

Traitement mathématique de processus de l'observation 95

- INTERPRETATIONS RECENTES DE LA THEORIE QUANTIQUE 105

Relation entre les concepts quantiques et classiques 105

- LES INTERPRETATIONS CAUSALES 109

Mesur et description causale 114

Remarques sur les mesures 118

CONCLUSION 119
BIBLIOGRAPHIE 122
TABLE DES MATIERES 124

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Ensembles orthogonaux de carrés latins et le corps de Galois.

Vu et approuvé :
Paris, le 19 juin 1960
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
J. PÉRÈS

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean SARRAILH